Mécanique du solide et Mécanique analytique[1]

Décembre 2008

Ch. Duval[2]



Figure 1 – Joseph-Louis Lagrange

1. Enseignement de la Licence de Physique de Luminy
2. Département de Physique, Université de la Méditerranée & CPT-CNRS, Luminy, Case 907, F–13288 Marseille, Cedex 9, FRANCE ; mailto : duval@cpt.univ-mrs.fr

Table des matières

Introduction

Nous allons, cette année, aborder dans le cours de Mécanique du solide et Mécanique analytique la formulation moderne des principes de la mécanique des systèmes dynamiques à un nombre fini de degrés de liberté. Le Lecteur consultera avec profit les ouvrages classiques [1, 10] qui ont inspiré ce cours.

Le formalisme mathématique de la mécanique rationnelle développé par Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) dans un corpus scientifique considérable, notamment sa *Mécanique analytique* (1788), a conduit à une généralisation des principes de la mécanique newtonienne à des systèmes dynamiques plus élaborés que celui du simple point matériel. Le *formalisme lagrangien* que nous allons introduire tire son origine du principe des travaux virtuels (d'Alembert, Maupertuis) qui a recours à la notion de mouvements virtuels d'un système pour déterminer *le* mouvement … réel de ce système. Dans le cas de systèmes soumis à des forces conservatives, les équations de Lagrange (équations du mouvement) sont dérivées d'une seule et unique fonction, *le lagrangien* L, sans avoir à prendre en considération les forces de liaisons (holonomes) souvent très complexes. D'où une simplification conceptuelle et pratique de la mise en équation des problèmes mécaniques. Ce formalisme est également géométrique car indépendant du choix d'un système de coordonnées (généralisées) ; d'où une extension naturelle au cas d'espaces de configuration très généraux (variétés différentiables). Nous émaillerons cette partie du cours de nombreux exemples illustratifs, notamment le problème des N corps, les pendules, certains systèmes à liaisons holonomes, le couplage minimal d'une particule chargée à un champ électromagnétique extérieur, etc.

L'autre approche de la mécanique des systèmes que nous aborderons concerne le formalisme hamiltonien (Sir William Rowan Hamilton, 1805–1865) introduit dans une série de travaux, notamment dans son article "On a General Method in Dynamics" (1834). Alors que le formalisme lagrangien mettait en jeu une fonction L de l'espace tangent à l'espace de configuration du système (espace des couples position-vitesse), le formalisme hamiltonien a également recours à une unique fonction, H, mais définie cette fois-ci sur l'*espace cotangent* à l'espace de configuration (espace des couples position-impulsion) ; cette fonction est l'*hamiltonien* du système et correspond à l'*énergie* ou générateur de l'évolution temporelle du système. Là encore, la théorie hamiltonienne admet des généralisations géométriques (variétés symplectiques, variétés de Poisson). Les méthodes modernes de quantification (décrivant le passage d'une description classique à une description quantique de l'univers physique) utilisent le formalisme hamiltonien de manière fondamentale.

Ces différents aspects de la mécanique analytique trouvent naturellement un champ d'application dans le chapitre important de la mécanique rationnelle que constitue la mécanique du solide (Euler, Poinsot, Lagrange, Kovalewski, etc.). Les mouvements du corps rigide (par exemple une toupie) sont très riches et leur étude subtile. Le fait que le corps solide ne présente pas, en général, de symétries particulières conduit à la notion importante d'*opérateur d'inertie* servant à décrire ses différents mouvements en présence ou non de forces extérieures. La configuration d'un solide sera, nous le verrons, déterminée par les éléments d'un groupe, le groupe euclidien SE(3), de l'espace euclidien tridimensionnel : la position d'un point origine du solide et l'orientation générale du solide par rapport à ce point. L'étude des changements de référentiels (passage Laboratoire-Solide) paramétrés par le temps est une étude obligée et riche d'enseignements (mécanique dans les systèmes non inertiels ; par exemple l'étude du pendule de Foucault, des ouragans et typhons, etc.). La dynamique d'un solide libre avec point fixe sera étudiée grâce aux théorèmes généraux de la mécanique et aussi dans le cadre hamiltonien (équations d'Euler). Le problème

de la toupie avec un point fixe, plongée dans le champ de pesanteur, est associé au nom de ... Lagrange : l'étude de certains des mouvements de la toupie de Lagrange sera également abordée.

Le champ d'application de l'étude du corps solide est vaste et important non seulement sur le plan de la mécanique abstraite [1] (alias analytique) mais aussi et surtout en mécanique appliquée où sont à l'œuvre les *phénomènes gyroscopiques.* [2] Citons, à titre d'exemples, les gyrocompas ou boussoles gyroscopiques déterminant le nord (deux degrés de liberté), les gyroscopes servant à stabiliser les satellites, à déterminer l'horizon artificiel dans les avions, etc. La stabilisation des (moto)cyclistes résulte aussi de l'effet gyroscopique. Rappelons enfin que l'explication du phénomène de précession des équinoxes (précession de l'axe de rotation de la terre — toupie aplatie sous l'effet des forces de marées dues au soleil et à la lune — avec une période de 25800 ans autour de la perpendiculaire au plan de l'écliptique) relève encore de la mécanique du solide.

Mes plus sincères remerciements vont à Jean-Philippe Michel pour sa lecture attentive et critique du manuscrit de ce cours.

---

1. Certaines toupies constituent des exemples de systèmes dynamiques *intégrables*, i.e. résolubles par quadratures, et un champ de recherche privilégié en mathématiques et physique mathématique ; l'aspect quantique de ces systèmes intégrables est un objet d'étude actuellement très actif.

2. En l'absence de moment de forces extérieures, un solide possède un moment angulaire constant ; d'où l'importance des dispositifs mettant en jeu des gyroscopes pour la stabilisation des véhicules terrestres, maritimes et aériens.

Chapitre 1

Les équations de Lagrange

1.1 Une introduction heuristique

Considérons pour (bien) débuter les trajectoires $\mathbf{r}(t)$ possibles d'une particule de masse m se déplaçant sous l'influence d'un champ de forces extérieur $\mathbf{F}$ dérivant, par exemple, d'un potentiel $V(\mathbf{r})$ indépendant du temps t. Les équations du mouvement de Newton s'écrivent, on le sait,

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{F} = -\mathbf{grad}(V) \tag{1.1.1}$$

où $\mathbf{grad}(V) = \partial V/\partial \mathbf{r}$ désigne le gradient [1] de la fonction différentiable V.

Désignons par $T = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}\|^2$ l'énergie cinétique de la particule ; elle varie, bien sûr, au cours du temps le long de chaque trajectoire $\mathbf{r}(t)$. Le potentiel étant ici stationnaire, i.e. $\partial V/\partial t$, l'**énergie totale** est une **constante du mouvement** :

$$H = T + V = \text{const.} \tag{1.1.2}$$

Exercice 1.1.1. *Vérifier la loi de conservation de l'énergie (1.1.2).*

1. Abus usuel de notation : on devrait écrire

$$\mathbf{grad}(V) = \overline{\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}}$$

où la barre désigne la transposition ; on note $\overline{\mathbf{v}}\,\mathbf{w} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ le produit scalaire ordinaire (euclidien) de $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ et $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ la norme de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Considérons, maintenant, la nouvelle expression

$$\boxed{L = T - V} \tag{1.1.3}$$

définie par l'étrange *différence* de l'énergie cinétique, T, et de l'énergie potentielle, V. Cette expression est clairement une fonction $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ de la position $\mathbf{r}$ et de la vitesse $\dot{\mathbf{r}}$ de la particule. On trouve facilement

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}$$

de sorte que les équations de Newton (3.2.22) peuvent se réécrire de la manière suivante

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0.$$

Nous avons donc prouvé le résultat suivant :

Définition-Théorème 1.1.1. *Soit T l'énergie cinétique d'une particule plongée dans un potentiel V ; on appelle* ***lagrangien*** *du système la fonction $L = T - V$. Le système des équations du mouvement de Newton est équivalent au système des* ***équations de Lagrange***

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 \qquad \& \qquad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}} \tag{1.1.4}$$

Remarque 1.1.2. *Le théorème précédent reste, bien entendu, valable dans le cas général d'un potentiel $V(\mathbf{r}, t)$ dépendant explicitement du temps.*

Exercice 1.1.3. *Soit $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \omega^2\|\mathbf{r}\|^2)$ un lagrangien défini sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$; écrire les équations de Lagrange. En donner la solution générale. Interprétation physique ?*

Exercice 1.1.4. *Soit $L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$; écrire les équations de Lagrange. Donner la solution générale $(r(t), \theta(t))$ de ce système d'équations différentielles. Que représentent ces courbes du plan euclidien ?*

Exercice 1.1.5. *Trouver l'expression du lagrangien $L(\theta, \dot{\theta})$ d'un pendule simple de masse m, longueur ℓ dans le champ de pesanteur $g = \text{const}$.*

1.2 Illustration : Equations de Fermat

Un exemple important utilisant les équations de Lagrange concerne l'optique géométrique dans la formulation qu'en a donnée Pierre de Fermat (1601-1665). Selon le **Principe de Fermat**, les rayons lumineux se propagent dans un milieu d'indice de réfraction $n(\mathbf{r})$ variable selon des courbes minimisant le chemin optique entre deux points quelconques. Ce principe revient, on le verra, à décrire les rayons lumineux par les solutions des équations de Lagrange pour le lagrangien

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = n(\mathbf{r})\,\|\dot{\mathbf{r}}\|. \tag{1.2.1}$$

Ce lagrangien s'interprète comme le *chemin optique élémentaire*, $n\dot{s}$, parcouru par la lumière dans un milieu d'indice n à la vitesse (scalaire) $\dot{s} = ds/dt$; ici t est un paramètre décrivant les rayons lumineux (courbes de l'espace euclidien E^3) et s désigne l'abscisse curviligne définie par la primitive suivante

$$s = \int \|\dot{\mathbf{r}}\|\,dt.$$

Nous noterons

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|}$$

la "vitesse unitaire". [2]

Les équations de Lagrange (1.1.4) prennent alors la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left(n(\mathbf{r})\,\frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|}\right) - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}\,\|\dot{\mathbf{r}}\| = 0$$

ou encore

$$\frac{d}{ds}[n\mathbf{u}]\,\frac{ds}{dt} = \mathbf{grad}\,n\,\frac{ds}{dt}$$

puisque $ds/dt = \|\dot{\mathbf{r}}\| > 0$ (on ne considère pas les points de rebroussement).

2. Attention : la vitesse de propagation de la lumière est bien infinie (!) dans le cadre de l'optique géométrique si t désigne le temps galiléen. Dans cet exemple t est, soulignons-le, un paramètre arbitraire servant à décrire les rayons lumineux. Rien à voir avec le temps ...

Proposition 1.2.1. *Les équations de Fermat gouvernant l'optique géométrique sont données par les équations de Lagrange pour le lagrangien (1.2.1) et prennent la forme*

$$\boxed{\frac{d}{ds}[n\mathbf{u}] = \mathbf{grad}\, n \qquad \& \qquad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{u}} \tag{1.2.2}$$

Corollaire 1.2.2. *Dans le vide, $n = 1$, les rayons lumineux empruntent les droites (géodésiques) euclidiennes d'équation paramétrique*

$$\mathbf{r}(s) = \dot{\mathbf{r}}(0)\, s + \mathbf{r}(0)$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.2.3. *Supposons que l'indice de réfraction soit, dans le plan, donné par la fonction discontinue*

$$n(x,y) = \begin{cases} n_1 & (y > 0) \\ n_2 & (y \leq 0) \end{cases}$$

où n_1 et n_2 sont deux constantes (positives). Déduire des équations (1.2.2) les ***Lois de Descartes***[3]

$$\begin{array}{rcll} n_1 \sin i_1 & = & n_2 \sin i_2 & (\textit{réfraction}) \\ i_1 & = & -i_2 & (\textit{réflexion}) \end{array}$$

où i_1 et i_2 sont les angles orientés formés par les rayons lumineux et la normale $\mathbf{e}_y$ au dioptre $y = 0$. $\mathcal{N}.\mathcal{B}$. Ne pas chercher à déterminer le gradient de l'indice de réfraction (car cet indice n'est pas une fonction continue !).

Exercice 1.2.4. *Déterminer les trajectoires des rayons lumineux dans le demi-plan supérieur, $H^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$, si l'indice de réfraction est $n(x,y) = 1/y$.*

1.3 Equations de Lagrange

1.3.1 Formalisme intrinsèque

Nous avons introduit les équations de Lagrange (1.1.4) dans un cas réellement très particulier (cas d'une particule non relativiste dans un potentiel extérieur) et, de plus, dans un système de coordonnées spécial (les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^n$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$). Les questions suivantes viennent alors naturellement à l'esprit :

3. Ces lois sont souvent attribuées à Snell & Descartes.

1. Peut-on généraliser les équations de Lagrange au cas des systèmes quelconques à un nombre fini de degrés de liberté (e.g. le problème des N corps en interactions mutuelles) ?
2. Les équations de Lagrange possèdent-elles un caractère intrinsèque (indépendant du système de coordonnées choisi sur l'espace de configuration) ?

La réponse à la première question sera apportée par les nombreux exemples qui émailleront la suite de l'exposé. Quant à la deuxième question, la réponse est fournie par la

Proposition 1.3.1. *Soit* $(q^1, \ldots, q^n)$ *un système de coordonnées arbitraire sur l'espace de configuration d'un système mécanique. Les mouvements de ce système sont donnés par les solutions des équations de Lagrange*

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad \& \qquad \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i \qquad \forall i = 1, \ldots, n} \tag{1.3.1}$$

avec $L = T - V$, *où* T *désigne l'énergie cinétique et* V *l'énergie potentielle du système.*

Démonstration. Nous nous limiterons à un système à un degré de liberté, $n = 1$. La généralisation au cas $n > 1$ est laissée en exercice.

Considérons donc un changement de coordonnées arbitraire $q \mapsto q^* = Q(q)$ où $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application monotone (un difféomorphisme local), i.e. vérifiant partout $\partial q^*/\partial q \equiv Q'(q) \neq 0$. Le lagrangien s'exprime ainsi dans chacun des systèmes de coordonnées selon $L = f(q, \dot{q}) = f^*(q^*, \dot{q}^*)$. Notons que pour toute courbe $q(t)$ on a $dq^*/dt = d(Q(q))/dt = Q'(q)\, dq/dt$ — dérivée d'une fonction composée. La transformation des coordonnées de configuration et de vitesse est, en définitive,

$$\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} q^* & = & Q(q) \\ \dot{q}^* & = & Q'(q)\, \dot{q} \end{pmatrix} \tag{1.3.2}$$

On trouve aisément, cf. (1.3.2),

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot q} &= \frac{\partial L}{\partial q^*}\frac{\partial q^*}{\partial \dot q} + \frac{\partial L}{\partial \dot q^*}\frac{\partial \dot q^*}{\partial \dot q}\\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot q^*}\,Q'(q)\end{aligned}$$

puisque $\partial q^*/\partial \dot q = 0$. D'autre part

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q} &= \frac{\partial L}{\partial q^*}\frac{\partial q^*}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial \dot q^*}\frac{\partial \dot q^*}{\partial q}\\ &= \frac{\partial L}{\partial q^*}\,Q'(q) + \frac{\partial L}{\partial \dot q^*}\,Q''(q)\,\dot q\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^*}\,Q'(q)\right) - \frac{\partial L}{\partial q^*}\,Q'(q) - \frac{\partial L}{\partial \dot q^*}\,Q''(q)\,\dot q\\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^*}\right)Q'(q) + \frac{\partial L}{\partial \dot q^*}\,Q''(q)\,\dot q - \frac{\partial L}{\partial q^*}\,Q'(q) - \frac{\partial L}{\partial \dot q^*}\,Q''(q)\,\dot q\\ &= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^*}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^*}\right]Q'(q)\end{aligned}$$

Si les équations de Lagrange (1.3.1) sont vérifiées dans les coordonnées $(q, \dot q)$, elles le seront automatiquement dans tout autre système $(q^*, \dot q^*)$ obtenu par un difféomorphisme (1.3.2) découlant de la condition $Q'(q) \neq 0$. □

1.3.2 Exercices illustratifs

Le but de ce sous-chapitre est de fournir, sous forme d'exercices relativement détaillés, des exemples de problèmes physiques mis en équation grâce au formalisme lagrangien.

Le système newtonien des trois corps

Considérons le système de trois corps M_1, M_2 et M_3, de masses m_1, m_2 et m_3, en interaction gravitationnelle mutuelle. Le potentiel d'interaction newtonienne entre les points M_i et M_j (avec $i \neq j$) est donné par

$$V_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3) = -\frac{G m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}$$

où $\mathbf{r}_i = \mathbf{OM}_i$ représente la position de l'astre M_i ($i = 1, 2, 3$) par rapport à une origine arbitraire O, et G la constante de Newton. On désigne par $\dot{\mathbf{r}}_i$ la vitesse du point M_i à un instant donné. Justifier le lagrangien du système

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dot{\mathbf{r}}_3) &= \frac{1}{2} m_1 \|\dot{\mathbf{r}}_1\|^2 + \frac{1}{2} m_2 \|\dot{\mathbf{r}}_2\|^2 + \frac{1}{2} m_3 \|\dot{\mathbf{r}}_3\|^2 \\ &\quad + \frac{G m_2 m_3}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\|} + \frac{G m_3 m_1}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\|} + \frac{G m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} \end{aligned}$$

en vérifiant que les équations de Lagrange sont bien équivalentes aux équations du mouvement de Newton pour ce système.

Le système général des N corps

Nous envisageons maintenant le cas général d'un système de points matériels $M_1, \ldots, M_N$ de masses $m_1, \ldots, m_N$ en interaction mutuelle et soumis à des forces extérieures. Nous supposerons que toutes les forces en jeu sont conservatives. Désignons par V_{ij} le potentiel d'interaction entre M_i et M_j (avec $i \neq j$) et supposons qu'il ne dépende que de $r_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$, la distance relative de M_i et M_j. On notera V_i^{ext} le potentiel dont dérive la force extérieure $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$ appliquée au point M_i.

Justifier que

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_k} = \mathbf{F}_{ij} \left[\delta_{jk} - \delta_{ik} \right]$$

pour tout $k = 1, 2, 3$, où

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i}$$

représente la force à laquelle est soumise M_i interagissant avec M_j. Vérifier que la troisième loi de Newton est vérifiée si $V_{ij} = V_{ji}$.

Considérons le lagrangien suivant

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} V_{ij} - \sum_{i=1}^{N} V_i^{\text{ext}} \tag{1.3.3}$$

où $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ et $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dot{\mathbf{r}}_3)$. Montrer que les équations de Lagrange (1.3.1)

restituent les équations du mouvement du système des N corps en interaction,

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{\mathrm{ext}}.$$

pour tout $i = 1, \ldots, N$.

Le pendule double

Ce système est constitué de deux pendules M_1 & M_2, de longueurs ℓ_1 & ℓ_2 constantes et de masses m_1 & m_2 plongés dans le champ de gravitation $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_x$ avec $g = \mathrm{const.} > 0$; le point de suspension du deuxième pendule est le point M_1 et celui du premier, l'origine O fixe du système de coordonnées cartésiennes (x, y) dans le plan euclidien. On désigne par θ_1 (resp. θ_2) l'angle que forme le pendule M_1 (resp. M_2) avec la verticale.

Déterminons le lagrangien du système. Posons $M_n = O + (x_n, y_n)$ pour $n = 1, 2$ dans le repère orthonormé direct $(\mathbf{e}_x\, \mathbf{e}_y)$ du plan pendulaire ; on a alors $x_1 = \ell_1 \cos\theta_1$, $y_1 = \ell_1 \sin\theta_1$ & $x_2 = \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2$, $y_2 = \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2$.

L'énergie cinétique de M_1 est $T_1 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2$; celle de M_2 est alors $T_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}m_2(\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1\ell_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)$.

Les énergies potentielles sont, de même, $V_1 = -m_1 g x_1 = -m_1 g \ell_1 \cos\theta_1$ ainsi que $V_2 = -m_2 g x_2 = -m_2 g(\ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2)$ — à des constantes additives près.

Le lagrangien total est alors $L = T_1 + T_2 - V_1 - V_2$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \;&=\; \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2\ell_1\ell_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ &\quad + (m_1 + m_2)g\ell_1\cos\theta_1 + m_2 g\ell_2\cos\theta_2. \end{aligned}$$

Les équations de Lagrange (1.3.1) fournissant les équations du mouvement du système s'écrivent ici $d(\partial L/\partial\dot{\theta}_n)/dt - \partial L/\partial\theta_n = 0$ pour $n = 1, 2$. On obtient ainsi,

après quelques simplifications, le système suivant

$$\begin{aligned} 0 &= (m_1+m_2)\ell_1\ddot{\theta}_1 + m_2\ell_2\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2 + m_2\ell_2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2 \qquad (1.3.4) \\ &\quad +(m_1+m_2)g\sin\theta_1 \\ 0 &= \ell_2\ddot{\theta}_2 + \ell_1\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1 - \ell_1\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1^2 \qquad (1.3.5) \\ &\quad +g\sin\theta_2. \end{aligned}$$

Ce système d'équations différentielles non linéaires couplées n'est pas intégrable analytiquement. On sait par contre, depuis Henri Poincaré, que ses solutions exhibent un *comportement chaotique*, c'est-à-dire, une sensibilité structurelle aux conditions initiales (impossibilité de retrouver les mêmes trajectoires du système en répétant l'expérience — avec des conditions initiales identiques sur le plan expérimental).

Nous pouvons, par contre, étudier les petits mouvements du système autour de la position d'équilibre (stable !) évidente [4]

$$\theta_1 = \theta_2 = 0.$$

On trouve alors aisément le système linéaire d'équations différentielles du second ordre couplées suivant

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{\theta}_1 + \mu\frac{\ell_2}{\ell_1}\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{\ell_1}\theta_1 \qquad (1.3.6) \\ 0 &= \ddot{\theta}_1 + \frac{\ell_2}{\ell_1}\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{\ell_1}\theta_2 \qquad (1.3.7) \end{aligned}$$

où

$$\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

est tel que $0 < \mu < 1$.

Exhibons les fréquences propres naturelles du système dans le cas simple où

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell$$

4. On vérifie que $\theta_1(t) = \theta_2(t) = 0$ est une solution exacte des équations (1.3.4) et (1.3.5).

en recherchant des solutions particulières du système (1.3.6) et (1.3.7) sous la forme

$$\begin{cases} \theta_1(t) &= A\cos\omega t \\ \theta_2(t) &= B\cos\omega t \end{cases}$$

où A, B et $\omega > 0$ sont des constantes à déterminer. On trouve aisément

$$\begin{cases} \omega^2\left[1+\mu\frac{B}{A}\right] &= \frac{g}{\ell} \\ \omega^2\left[1+\frac{B}{A}\right] &= \frac{g}{\ell}\frac{B}{A} \end{cases} \tag{1.3.8}$$

et, en divisant membre à membre les deux équations précédentes, $(B/A)^2 = 1/\mu$. En reportant maintenant ce résultat :

$$\left(\frac{B}{A}\right)_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

dans une des deux équations (1.3.8), il vient alors

$$\omega_\pm^2 = \frac{g/\ell}{1\pm\sqrt{\mu}}.$$

Les deux pendules oscillent en *phase* aux basses fréquences :

$$\begin{cases} \theta_1^+(t) &= A\cos(\omega_+ t) \\ \theta_2^+(t) &= \frac{A}{\sqrt{\mu}}\cos(\omega_+ t) \end{cases} \qquad \& \qquad \omega_+ = \sqrt{\frac{g/\ell}{1+\sqrt{\mu}}} \tag{1.3.9}$$

ou en *opposition de phase* aux hautes fréquences :

$$\begin{cases} \theta_1^-(t) &= A\cos(\omega_- t) \\ \theta_2^-(t) &= \frac{A}{\sqrt{\mu}}\cos(\omega_- t+\pi) \end{cases} \qquad \& \qquad \omega_- = \sqrt{\frac{g/\ell}{1-\sqrt{\mu}}} \tag{1.3.10}$$

où $\theta_1^\pm(0) = A$ reste arbitraire mais ... petit.

1.3.3 Liaisons holonomes

Si un point matériel est astreint à se mouvoir sur une courbe ou une surface dans l'espace euclidien (par exemple sur une sphère de rayon donné dans le cas du pendule sphérique), on dit que le système présente une *liaison holonome*.

Donnons maintenant la définition générale de la notion de liaison holonome. Considérons un système mécanique à n *degrés de liberté*, i.e. dont la configuration est déterminée par n paramètres *indépendants*. Par exemple un système de N particules évoluant dans l'espace euclidien E^3 est un système à $n = 3N$ degrés de liberté ; dans ce cas $(E^3)^N = E^3 \times \ldots \times E^3$ est l'espace de configuration. [5] Supposons maintenant que les points soient contraints à se déplacer sur une hypersurface définie par une équation

$$F(M_1, \ldots, M_N) = 0 \tag{1.3.11}$$

où $F : (E^3)^N \to \mathbb{R}^m$ est une application différentiable (avec $0 < m < n$) définissant la contrainte ; nous définirons le nouvel espace de configuration par

$$Q = F^{-1}(0).$$

Cette hypersurface (ou "variété") est décrite par $n - m$ coordonnés "généralisées" ; dans ce cas $\dim(Q) = n - m$ est le nombre de degrés de liberté du système contraint. [6] Nous dirons que la condition (1.3.11) est une **liaison holonome** pour le système.

Remarque 1.3.2. *Les liaisons holonomes ne mettent pas en jeu des conditions sur les vitesses des points du système. Par exemple la liaison décrivant une roue roulant sans glisser sur une route est une liaison non holonome — elle exprime le fait que la vitesse du point de contact de la roue avec le sol est nulle.*

Exemple 1.3.3. *Un haltère formé de deux masses reliées par un manche de longueur $\ell > 0$ a pour espace de configuration*

$$Q = \{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,|\, F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2 - \ell^2 = 0\}$$

et cet espace de dimension 5 a la topologie $Q \cong \mathbb{R}^3 \times S^2$ où S^2 désigne la 2-sphère (de rayon $\ell > 0$) plongée dans $\mathbb{R}^3$.

5. Il faudrait, en fait, considérer que l'espace de configuration est plutôt $(E^3)^N - \{\text{collisions}\}$.
6. Ceci découle du fait que F est supposé de *rang maximum* (un point technique important mais délicat que nous ne développerons pas).

Exercice 1.3.4. *Donner la fonction $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définissant l'espace de configuration Q du double pendule plan. Vérifier que $Q \cong S^1 \times S^1$ (tore 2-dimensionnel).*

Comment le formalisme lagrangien se présente-t-il dans le cas de systèmes avec liaisons holonomes ? Nous allons montrer que les équations de Lagrange se formulent de fait en oubliant complètement les forces de liaison (contrairement au formalisme newtonien, plus difficile à mettre en œuvre dans un sens).

Illustrons ceci en donnant un exemple élémentaire où un point matériel est astreint à se déplacer sur une courbe du plan euclidien (par exemple un cercle de rayon donné pour le pendule simple). Nous supposons, en fait, notre point soumis à un potentiel de confinement (potentiel harmonique intense dans la direction orthogonale à la courbe créant une force de rappel intense vers les points de la courbe).

Soit $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ la position d'un point matériel de masse m dans le plan (on a choisi un système de coordonnées euclidiennes) et soit

$$V_\omega(x, y) = V_0(x, y) + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 \tag{1.3.12}$$

le potentiel tout à fait général dans lequel est plongé ce point de masse m. Nous allons ensuite considérer la limite $\omega \to \infty$ qui permettra de confiner le point matériel sur l'axe des x.

Le lagrangien du système est alors $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V_\omega(x, y)$. L'équation de Lagrange pour y s'écrit $d/dt(\partial L/\partial \dot{y}) - \partial L/\partial y = m(\ddot{y} + \omega^2 y) + \partial V_0/\partial y = 0$. Dans la limite des grandes pulsations ω le dernier terme sera tout à fait négligeable et

$$\ddot{y} + \omega^2 y^2 \approx 0.$$

Cette équation différentielle possède, on le sait, une intégrale première (reliée à l'énergie) $e = \dot{y}^2 + \omega^2 y^2 = \omega^2 y_{\max}^2 = \text{const}$. Donc $-y_{\max} \leq y \leq y_{\max}$ où $y_{\max} = \sqrt{e}/\omega$. Finalement $y_{\max} \to 0$ si $\omega \to \infty$ et le point est donc confiné sur la courbe $y = 0$ par cet artifice mathématique.

L'équation de Lagrange pour x s'écrit $d/dt(\partial L/\partial \dot{x}) - \partial L/\partial x = m\ddot{x} + \partial V_0/\partial x = 0$.

Dans la limite $\omega \to \infty$ nous aurons finalement

$$m\ddot{x} + V'(x) = 0 \qquad \text{où} \qquad V(x) = V_0(x, 0) \tag{1.3.13}$$

puisque $\lim_{\omega\to\infty} y = 0$. Nous venons de prouver le résultat suivant

Proposition 1.3.5 ([1]). *Un point matériel est soumis au potentiel (1.3.12) de confinement $V_\omega(x, y)$ dans le plan euclidien. Soit $(x_\omega(t), y_\omega(t))$ la solution générale des équations de Lagrange avec conditions initiales $(y_\omega(0) = 0, \dot{y}_\omega(0) = 0)$. Lorsque $\omega \to \infty$ il existe une limite $x(t) = \lim_{\omega\to\infty} x_\omega(t)$ qui vérifie l'équation de Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L_0}{\partial x} = 0 \qquad \textit{où} \qquad L_0 = L|_{y=\dot{y}=0}.$$

Ce résultat se généralise immédiatement au cas de toute courbe dans le plan et, plus généralement, au cas de toute hypersurface d'un espace de configuration.

En fait, les équations de Lagrange pour un lagrangien L d'un système défini par des liaisons holonomes (1.3.11) se ramènent aux équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L_0}{\partial q^i} = 0 \qquad \text{où} \qquad L_0 = L|_{F=\dot{F}=0} \tag{1.3.14}$$

pour $i = 1, \ldots, n-m$ exprimées dans un système de coordonnées $(q^1, \ldots, q^{n-m})$ de la surface $Q = F^{-1}(0)$.

Exercice 1.3.6. *Ecrire les équations du mouvement d'un pendule sphérique de longueur ℓ dans le champ de pesanteur $g =$ const. $\mathcal{N}.\mathcal{B}$. On utilisera, bien sûr, un système de coordonnées sphériques (θ, φ) de S^2.*

Démonstration. La position d'un point sur la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ de rayon ℓ est paramétrée par $\mathbf{r} = (x, y, z) = \ell(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, en coordonnées sphériques ; ici $\varphi \in (0, 2\pi)$ désigne la longitude et $\theta \in (0, \pi)$ la colatitude. La vitesse du point mobile sur la sphère étant $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, il vient aisément $\|\mathbf{v}\|^2 = \ell^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$. Comme l'énergie potentielle est $V = mgz = mg\ell\cos\theta$, à une constante additive près, on obtient le lagrangien $L = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 - V$ du pendule sphérique en terme des coordonnées sphériques et des vitesses associées

$$L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - mg\ell\cos\theta.$$

Les équations de Lagrange se lisent maintenant

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \tag{1.3.15}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sin^2\theta\,\dot{\varphi}\right] = 0 \tag{1.3.16}$$

ce qui implique une constante du mouvement (reliée au *moment angulaire*)

$$C = \sin^2\theta\,\dot{\varphi} = \text{const.}$$

associée à la *variable cyclique* φ.[7] Les solutions $\varphi(t) = \varphi_0$ sont des solutions particulières : mouvements d'un pendule simple dans un plan méridien. Les solutions du système précédent ne s'expriment pas en terme de fonctions élémentaires.

Dans le cas $g = 0$, les solutions des équations de Lagrange pour un point matériel libre sur la sphère sont les *géodésiques* de la sphère. Il est clair que les méridiens ($\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0, \varphi(t) = \varphi_0$) sont des géodésiques. Comme l'axe sud-nord a été choisi de manière arbitraire, ce sont en fait tous les *grands cercles* qui constituent les géodésiques de la sphère. □

1.3.4 Le couplage minimal au champ électromagnétique

Comment maintenant déduire les équations de Lorentz gouvernant le mouvement d'une particule de masse m et de charge électrique q soumise à l'action du champ électromagnétique extérieur ?

Nous savons que ces équations du mouvement ne se déduisent pas de la théorie du champ électromagnétique de Maxwell, qu'elles relèvent en quelque sorte d'un autre principe : le **principe du couplage minimal**. Le formalisme lagrangien permet une formulation simple et élégante de ce principe de base de l'électrodynamique.

7. On dit qu'une variable, disons φ, est **cyclique** si $\partial L/\partial\varphi = 0$. Grâce aux équations de Lagrange l'*impulsion* associée

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} \tag{1.3.17}$$

est automatiquement une **intégrale première**, $p_\varphi = \text{const.}$, des équations du mouvement.

Soit $L_0 = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}\|^2$ le lagrangien *libre* de la particule non relativiste. Si l'on soumet ce système à l'action du champ électromagnétique $(\mathbf{E},\mathbf{B})$, la prescription du couplage minimal consiste à remplacer le lagrangien L_0 par le lagrangien suivant

$$\boxed{L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + q\Big[\langle \mathbf{A}(\mathbf{r},t),\dot{\mathbf{r}}\rangle - \phi(\mathbf{r},t)\Big]} \tag{1.3.18}$$

qui dépend explicitement du *potentiel vecteur* $\mathbf{A}$ et du *potentiel scalaire* ϕ dont dérive le champ électromagnétique selon

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A}. \tag{1.3.19}$$

Remarque 1.3.7. *Nous verrons que les équations de Lagrange pour (1.3.18) ne mettent en jeu que le champ électromagnétique et pas les potentiels (non physiques) définis à une transformation de jauge près.*

Ecrivons (1.3.18) comme $L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) = \frac{1}{2}m\sum_{j=1}^{3}(\dot{x}^j)^2 + q\Big[\sum_{j=1}^{3}A_j\,\dot{x}^j - \phi\Big]$ où les x^j désignent les composantes (cartésiennes) de la position $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$ et $\dot{x}^j$ celles de la vitesse $\dot{\mathbf{r}}\in\mathbb{R}^3$ ainsi que $A_j \equiv A^j$ celles du potentiel (co)vecteur $\mathbf{A}\in C^\infty(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ choisi.

La i-ème composante de l'impulsion $\mathbf{p} = \partial L/\partial\dot{\mathbf{r}}$ est ainsi

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}_i + qA_i$$

pour tout $i = 1,2,3$. En notant $\partial_i := \partial/\partial x^i$ l'opérateur de dérivée partielle selon x^i et $\partial_t := \partial/\partial t$ celui de dérivée partielle par rapport au temps t, on obtient aisément

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = q\Big[\sum_{j=1}^{3}\partial_i A_j \dot{x}^j - \partial_i\phi\Big]$$

pour tout $i = 1,2,3$.

Les équations de Lagrange s'écrivent alors

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial x^i} &= m\ddot{x}_i + q\dot{A}_i - q\left[\sum_{j=1}^{3} \partial_i A_j\, \dot{x}^j - \partial_i \phi\right] \\ &= m\ddot{x}_i + q\left[\sum_{j=1}^{3} \partial_j A_i\, \dot{x}^j + \partial_t A_i\right] - q\left[\sum_{j=1}^{3} \partial_i A_j \dot{x}^j - \partial_i \phi\right] \\ &= m\ddot{x}_i + q\left[-\sum_{j=1}^{3} F_{ij}\, \dot{x}^j + \partial_t A_i + \partial_i \phi\right] \end{aligned}$$

où l'on a défini le *tenseur magnétique* antisymétrique

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

pour tous $i, j = 1, 2, 3$ — on vérifie que $F_{12} = (\mathbf{rot}\mathbf{A})_3 = B_3$, etc., grâce à (1.3.19). En d'autres termes la matrice 3×3 antisymétrique $(F^i_j) \equiv (F_{ij})$ est donnée par

$$F = -j(\mathbf{B})$$

où $j(\mathbf{B}) \in L(\mathbb{R}^3)$ est l'opérateur linéaire défini par

$$j(\mathbf{B})\mathbf{v} := \mathbf{B} \times \mathbf{v} \qquad\qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$$

où $\times$ désigne le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On obtient enfin les équations de Lagrange $m\ddot{\mathbf{r}} + q\,[\mathbf{B} \times \dot{\mathbf{r}} + \partial_t \mathbf{A} + \mathbf{grad}\phi] = 0$, c'est-à-dire, compte tenu de (1.3.19),

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = q\Big[\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\Big]} \qquad (1.3.20)$$

L'équation différentielle (1.3.20) du second ordre est l'équation de Lorentz dont les solutions $\mathbf{r}(t)$ constituent les mouvements (ou trajectoires) d'une particule chargée dans un champ électromagnétique extérieur.

Chapitre 2

Les équations de Hamilton

2.1 Equations canoniques

Le formalisme lagrangien met en jeu, nous l'avons vu, l'espace "tangent" à l'espace de configuration d'un système mécanique, c'est-à-dire l'espace des configurations et des *vitesses* — vecteurs tangents — possibles pour ledit système. Nous avons, d'autre part, mis en évidence la notion d'impulsion généralisée qui intervient dans la formulation des équations de Lagrange. Dans certains contextes, il peut s'avérer judicieux de travailler plutôt dans l'espace dit "cotangent" à notre espace de configuration, i.e. l'espace des configurations et des *impulsions* — (co)vecteurs tangents. C'est précisément ce que se propose de faire le formalisme hamiltonien dû, entre autres, à W.R. Hamilton.

Soit $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ le lagrangien d'un système (éventuellement soumis à des contraintes holonomes) dont l'espace de configuration est cartographié par un système de coordonnées $\mathbf{q} = (q^1, \ldots, q^n) \in M \subset \mathbb{R}^n$ et l'espace tangent au point $\mathbf{q}$ décrit par les vitesses $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.1. *On appelle* ***impulsion généralisée*** *pour le lagrangien* $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$*, dans le système de coordonnées considéré, le covecteur*

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \tag{2.1.1}$$

au point $q \in M$*, ou encore* $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$ *pour tout* $i = 1, \ldots, n$.

Nous voyons que $\mathbf{p}$ est alors une fonction de $\mathbf{q}$ et $\dot{\mathbf{q}}$ définie par (2.1.1) de sorte que l'application

$$\mathsf{F}_L : (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto (\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

constitue une application (locale) du tangent au cotangent de l'espace de configuration. Nous supposerons cette application inversible et d'inverse différentiable, pour que $\dot{\mathbf{q}}$ puisse aussi être vue comme fonction différentiable de $\mathbf{p}$ et de $\mathbf{q}$.

Nous prouvons maintenant le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.1.2. *Le système des équations de Lagrange (1.3.1) est équivalent au système de* $2n$ *équations différentielles du premier ordre, les équations de Hamilton,* [1]

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt} &= -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \\ \dfrac{dq^i}{dt} &= +\dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}} \tag{2.1.2}$$

pour $i = 1, \ldots, n$ *où*

$$\boxed{H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - L} \tag{2.1.3}$$

est le ***hamiltonien*** *du système, fonction différentiable* $H(p_1, \ldots, p_n, q^1, \ldots, q^n)$ *de l'****espace des phases****.* [2]

Démonstration. Calculons la différentielle de $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$: on obtient alors facilement $dL = \sum_{i=1}^{n} (\partial L/\partial q^i) dq^i + (\partial L/\partial \dot{q}^i) d\dot{q}^i$ ou encore

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\dot{\mathbf{q}} \\ &= \dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{p} \cdot d\dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

en utilisant les équations de Lagrange $\partial L/\partial \mathbf{q} = \dot{\mathbf{p}}$ (cf. (1.3.1)) et (2.1.1). Une intégration par parties donne alors $dL = \dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{q} + d(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}) - d\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}$ ou encore

1. On appelle aussi ces équation *canoniques*.

2. L'hamiltonien $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est la *transformée de Legendre* (2.1.3) du lagrangien $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. L'hamiltonien est défini sur l'espace des phases $T^*M = (\mathbb{R}^n)^* \times M$, c'est-à-dire l'espace "cotangent" de l'espace de configuration $M \subset \mathbb{R}^n$, alors que le lagrangien est, lui, défini sur le l'espace "tangent" $TM = \mathbb{R}^n \times M$ de l'espace de configuration M.

$d(L - \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{q} - d\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}$ que l'on réécrit en définissant, cf. (2.1.3),

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L$$

comme

$$dH = d\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{q} \tag{2.1.4}$$

en mettant en évidence que l'hamiltonien est une fonction $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. On trouve alors aisément $\dot{\mathbf{q}} = \partial H / \partial \mathbf{p}$ et $\dot{\mathbf{p}} = -\partial H / \partial \mathbf{q}$. □

Exercice 2.1.3. *Calculer le hamiltonien de l'oscillateur harmonique dont le lagrangien est donné dans l'Exercice 1.1.3. En déduire les équations de Hamilton.*

Exercice 2.1.4. *Supposons que l'énergie cinétique d'un système mécanique soit une fonction $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ et l'énergie potentielle donnée par une fonction $V(\mathbf{q})$. Le lagrangien du système est, on le sait,*

$$L = T - V.$$

Trouver la condition à imposer à l'énergie cinétique T pour que le hamiltonien soit de la forme suivante

$$\boxed{H = T + V} \tag{2.1.5}$$

Démonstration. Indication : prouver, en utilisant la formule d'Euler pour les fonctions homogènes de degré k,[3] que T doit être une fonction homogène en la variable $\dot{\mathbf{q}}$ de degré k déterminé. □

Remarque 2.1.5. *Le Théorème 2.1.2 reste inchangé dans le cas non stationnaire où le lagrangien $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ dépend explicitement du temps. On trouve dans ce cas que les équations de Newton (2.1.2) se complètent par*

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{2.1.6}$$

3. Rappelons qu'une fonction $f(\mathbf{r})$ est homogène de degré k si $f(\lambda \mathbf{r}) = \lambda^k f(\mathbf{r})$ pour tout $\lambda > 0$.

2.1.1 Exercices

Voici maintenant quelques exercices simples pour illustrer l'usage des équations de Hamilton.

Exercice 2.1.6. *Donner le hamiltonien $H(p_\theta, \theta)$ du pendule simple de longueur ℓ dans le champ de pesanteur d'accélération $g = \text{const.} > 0$. Ecrire les équations de Hamilton. Conclusion ?*

Exercice 2.1.7. *On considère le hamiltonien*

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\|\mathbf{p}\|}{n(\mathbf{r})} \tag{2.1.7}$$

fonction de $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$, où $n(\mathbf{r}) > 0$ une fonction différentiable. Montrer que les équations de Hamilton correspondent aux équations de Fermat (1.2.2) pour un indice de réfraction variable $n(\mathbf{r})$.

Démonstration. Indication : introduire la vitesse unitaire $\mathbf{u} = \mathbf{p}/\|\mathbf{p}\| = d\mathbf{r}/ds$. □

Exercice 2.1.8. *Etudions la dynamique hamiltonienne dans un référentiel tournant (par exemple lié à un manège) à une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ autour de la direction $\mathbf{e}_z$. On suppose que ces deux référentiels coïncident au temps $t = 0$.*

1. *Montrer que si $\mathbf{q} = (x, y, z)$ désignent les coordonnées dans le référentiel "fixe" et $= \mathbf{Q} = (X, Y, Z)$ celles associées au référentiel tournant, à l'instant t, on a*

$$x = X \cos \omega t - Y \sin \omega t \tag{2.1.8}$$

$$y = X \sin \omega t + Y \cos \omega t \tag{2.1.9}$$

$$z = Z \tag{2.1.10}$$

2. *Exprimer l'énergie cinétique $T(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ d'un point matériel libre de masse m.*
3. *Si $V(\mathbf{Q})$ désigne le potentiel dans lequel est plongé le point matériel, donner l'expression du lagrangien $L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ du système.*
4. *En déduire le hamiltonien $H(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.*

5. *Ecrire les équations de Hamilton du système dans le référentiel tournant. (On pourra poser $W = X + iY \in \mathbb{C}$.)*

Démonstration. Réponses : (i) Le lagrangien est donné par

$$L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2}m\left[\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + \omega^2(X^2 + Y^2)\right] + m\omega(X\dot{Y} - Y\dot{X}) - V(X, Y, Z)$$

et l'impulsion canonique donnée par $\mathbf{P} = \partial L/\partial \dot{\mathbf{Q}} = m(\dot{X} - \omega Y, \dot{Y} + \omega X, \dot{Z})$. (ii) Le hamiltonien prend alors la forme

$$H(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{1}{2m}\left[P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right] - \omega(XP_y - YP_x) + V(X, Y, Z).$$

Enfin (iii) les équations de Hamilton conduisent au système d'équations différentielles couplées

$$\ddot{X} = 2\omega\dot{Y} + \omega^2 X - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial X} \tag{2.1.11}$$

$$\ddot{Y} = -2\omega\dot{X} + \omega^2 Y - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial Y} \tag{2.1.12}$$

$$\ddot{Z} = -\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial Z} \tag{2.1.13}$$

Remarquons que les deux premières équations différentielles s'écrivent, en introduisant le changement de coordonnées $W = X + iY$ suggéré plus haut,

$$m\ddot{W} = -2im\omega\dot{W} + m\omega^2 W - 2\frac{\partial V}{\partial \overline{W}}. \tag{2.1.14}$$

Le premier terme dans le membre de droite de (2.1.14) est la *force de Coriolis*, le second la *force centrifuge* et le dernier la *force extérieure* dérivant du potentiel V. □

2.1.2 Le couplage minimal au champ électromagnétique

Donnons ici la version hamiltonienne du principe de couplage minimal à un champ électromagnétique, formulé dans le cadre lagrangien dans le Chapitre 1.3.4.

Nous nous proposons de calculer maintenant l'hamiltonien $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ déduit du lagrangien (1.3.18) — via la transformation de Legendre (2.1.3) — d'une particule

de masse m et de charge électrique q plongée dans une champ électromagnétique extérieur $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ dérivant, cf. (1.3.19), d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}$ et d'un potentiel scalaire ϕ.

Calculons donc le moment conjugué $\mathbf{p} = \partial L/\partial \dot{\mathbf{r}}$. Il vient aisément

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}$$

de sorte que $\dot{\mathbf{r}} = (\mathbf{p} - q\mathbf{A})/m$. On a alors

$$\begin{aligned}
H &= \mathbf{p}.\dot{\mathbf{r}} - L \\
&= \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})\frac{1}{m} - L \\
&= \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})\frac{1}{m} - \left(\frac{1}{2}m\left\|\frac{1}{m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})\right\|^2 + q\left[\langle \mathbf{A}, \frac{1}{m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})\rangle - \phi\right]\right) \\
&= (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})\frac{1}{m} - \frac{1}{2}m\left\|\frac{1}{m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})\right\|^2 + q\phi \\
&= \frac{1}{2m}\|\mathbf{p} - q\mathbf{A}\|^2 + q\phi.
\end{aligned}$$

Si $H_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \|\mathbf{p}\|^2/(2m)$ désigne l'hamiltonien libre d'une particule (non relativiste) de masse m, l'hamiltonien décrivant les mouvements de cette particule dans un champ électrique dérivant d'un potentiel ϕ sera donné, cf. (2.1.5), par l'hamiltonien standard $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = H_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + V(\mathbf{r}, t)$ où $V = q\phi$. Nous venons de prouver que le **couplage minimal** à un champ électromagnétique extérieur s'opère maintenant par la prescription plus subtile qui consiste à remplacer $H_0(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ par

$$\boxed{H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m}\|\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\|^2 + q\phi(\mathbf{r}, t)} \tag{2.1.15}$$

Exercice 2.1.9. *Ecrire les équations de Hamilton pour le hamiltonien (2.1.15) et retrouver les équations de Lorentz (1.3.20).*

2.2 Crochets de Poisson et transformations canoniques

Introduisons dans ce chapitre des notions nouvelles et importantes en mécanique analytique, à savoir celles de crochet de Poisson et de structure symplectique. Ces

notions ont conduit à des généralisations multiples dans le cadre géométrique et algébrique relevant des mathématiques et de la physique mathématique.

2.2.1 Crochets de Poisson

Considérons une fonction différentiable $F : T^*M \to \mathbb{R}$ de l'espace des phases à valeurs réelles, ce que l'on appelle **observable** classique $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ en physique.[4] Comment évolue cette fonction au cours du temps ? compte tenu de l'évolution temporelle propre du système hamiltonien. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} \\ &= -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\end{aligned}$$

grâce aux équations de Hamilton (2.1.2). D'où le résultat suivant

Définition-Théorème 2.2.1. *Nous appellerons* ***crochet de Poisson*** *de deux observables F et G de l'espace des phases la nouvelle observable*[5]

$$\boxed{\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i}} \tag{2.2.1}$$

de sorte que l'évolution temporelle de toute observable classique F soit gouvernée par l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \{H, F\}} \tag{2.2.2}$$

Bien entendu, les équations de Hamilton (2.1.2) sont retrouvées via (2.2.2) car $\dot{p}_i = \{H, p_i\} = -\partial H/\partial q^i$ et $\dot{q}^i = \{H, q^i\} = \partial H/\partial p_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Corollaire 2.2.1. *L'hamiltonien H est une constante du mouvement,*

$$\frac{dH}{dt} = 0. \tag{2.2.3}$$

---

4. Nous avons déjà rencontré de telles fonctions, par exemple l'hamiltonien H (énergie), une composante p_i de l'impulsion d'une particule, une composante q^j de sa position à un instant donné avec $(i, j = 1, 2, 3)$, etc.

5. Tout système de coordonnées $(p_1, \ldots, p_n, q^1, \ldots, q^n)$ dans lequel le crochet de Poisson est de la forme (2.2.1) est dit système de **coordonnées canoniques**.

Démonstration. Le crochet de Poisson (2.2.1) est *antisymétrique* en ses arguments, $\{F, G\} \equiv -\{G, F\}$, et donc $dH/dt = \{H, H\} = 0$. $\square$

Remarquons que le crochet de Poisson (2.2.1) peut alors s'écrire comme

$$\{F, G\} = \delta_F G \tag{2.2.4}$$

si l'on introduit la dérivation suivante

$$\delta_F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \tag{2.2.5}$$

aussi appelée **champ hamiltonien** associé à la fonction F de l'espace des phases. Le fait que $\delta_F : G \mapsto \{F, G\}$ soit une dérivation implique la propriété importante suivante $\{F, GH\} = \delta_F(FG) = (\delta_F G)H + G\delta_F H = \{F, G\}H + G\{F, H\}$. Nous avons enfin le

Théorème 2.2.2. *Le crochet de Poisson (2.2.1) est une application bilinéaire*

$$(F, G) \mapsto \{F, G\}$$

jouissant des propriétés suivantes

1. $\{F, G\} \equiv -\{G, F\}$ *(antisymétrie),*
2. $\{F, GH\} \equiv \{F, G\}H + G\{F, H\}$ *(règle de Leibniz),*
3. $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} \equiv 0$ *(identité de Jacobi).*

Exercice 2.2.3. *Prouver l'identité de Jacobi (on se restreindra au cas $n = 1$).*

Exercice 2.2.4. *Soient $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ les coordonnées canoniques de $T^*\mathbb{R}^n$. Calculer les crochets de Poisson mutuels des composantes p_i et q^j, pour $i, j = 1, \ldots, n$. Montrer que l'espace vectoriel réel $\mathfrak{h}_n$ de dimension $2n+1$ engendré par $p_1, \ldots, p_n, q^1, \ldots, q^n$ et la fonction constante 1 est stable sous le crochet de Poisson.*[6]

6. On appelle un tel espace *algèbre de Lie* ; ici $\mathfrak{h}_n$ est une algèbre de Lie associée au nom de Werner Heisenberg, physicien allemand (1901–1976).

Exercice 2.2.5. *Considérons l'espace des phases* $T^*\mathbb{R}^3$ *et désignons par* $\mathbf{L} = \mathbf{p}\times\mathbf{q}$ *le moment angulaire. (i) Calculer pour* $i, j = 1, 2, 3$ *les crochets de Poisson* $\{L_i, L_j\}$ *des composantes du moment angulaire. (ii) Un hamiltonien* $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ *est invariant sous rotations euclidiennes ssi* $\{L_i, H\} = 0$ *quel que soit* $i = 1, 2, 3$*. A quelle condition l'hamiltonien* $H = \|\mathbf{p}\|^2/(2m) + V(\mathbf{q})$ *d'une particule de masse* m *plongée dans un potentiel* $V(\mathbf{q})$ *est-il invariant sous rotations ?*

2.2.2 Structure symplectique

Nous introduisons dans cette Section une notion nouvelle, celle de forme symplectique canonique de l'espace des phases $T^*\mathbb{R}^n$; cette notion, qui relève de la géométrie différentielle à un niveau plus avancé, sera néanmoins traitée brièvement afin d'introduire à celle de transformations canoniques : changements de coordonnées de l'espace des phases qui laissent les équations de Hamilton invariantes, et qui donc invarient les lois de la mécanique.

Réécrivons l'expression (2.1.4) de manière tout à fait équivalente comme

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \delta\mathbf{q} - \delta\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} = -\delta H \tag{2.2.6}$$

pour tous vecteurs $(\delta\mathbf{p}, \delta\mathbf{q})$ de l'espace des phases ; en effet, $\delta H = (\partial H/\partial\mathbf{p}) \cdot \delta\mathbf{p} + (\partial H/\partial\mathbf{q}) \cdot \delta\mathbf{q}$ représente la dérivée de l'hamiltonien H dans la direction $(\delta\mathbf{p}, \delta\mathbf{q})$. L'expression précédente restitue bien les équations de Hamilton (2.1.2), à savoir

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{p}}{dt} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\[2ex] \dfrac{d\mathbf{q}}{dt} & = & +\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Définition-Théorème 2.2.2. *Définissons, en tout point* $x = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ *de l'espace des phases* $T^*\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n$ *l'expression suivante*

$$\omega(\delta x, \delta' x) = \delta\mathbf{p} \cdot \delta'\mathbf{q} - \delta'\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{q}. \tag{2.2.8}$$

(i) Cette expression dépend bilinéairement des vecteurs $\delta x, \delta' x \in T^*\mathbb{R}^n$ *et est anti-*

symétrique : $\omega(\delta x, \delta' x) \equiv -\omega(\delta' x, \delta x)$. *(ii) On a de plus*

$$\omega(\delta x, \delta' x) = \delta\alpha(\delta' x) - \delta'\alpha(\delta x) \qquad \textit{où} \qquad \alpha(\delta x) = \mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{q} \tag{2.2.9}$$

et (iii) $\ker\omega = \{0\}$. *Une telle application* $\omega : T^*\mathbb{R}^n \times T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est appelée* ***forme symplectique*** *canonique de l'espace des phases.*[7]

Démonstration. On a clairement l'identité $\omega(\delta x, \delta' x) + \omega(\delta' x, \delta x) \equiv 0$ et de plus $\omega(\delta x, a\delta' x + b\delta'' x) \equiv a\,\omega(\delta x, \delta' x) + b\,\omega(\delta x, \delta'' x)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$; d'où le (i). L'expression (2.2.9) reproduit simplement la définition (2.2.8), ce qui justifie (ii). Enfin, $\delta x \in \ker\omega$ ssi $\omega(\delta x, \delta' x) = 0$ pour tout $\delta' x$; mais, cette dernière condition implique à la fois $\delta\mathbf{p} = 0$ et $\delta\mathbf{q} = 0$, c'est-à-dire $\delta x = 0$, d'où (iii). □

Soit $H(x)$ un hamiltonien, le champ de vecteurs $x \mapsto \delta_H x$ défini par (2.2.6), c'est-à-dire

$$\omega(\delta_H x, \delta' x) \equiv -\delta' H \tag{2.2.10}$$

est le **champ hamiltonien** associé à H — déjà introduit en (2.2.5) ; cette dernière définition est maintenant *intrinsèque* (car elle ne met en jeu que la fonction H et la forme symplectique ω mais *pas* un système de coordonnées particulier).

Proposition 2.2.6. *Les équations de Hamilton associées à un hamiltonien* $H(x)$ *prennent la forme d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, à savoir :*

$$\frac{dx}{dt} = \delta_H x \tag{2.2.11}$$

avec la définition (2.2.10) du champ hamiltonien δ_H *; le crochet de Poisson de deux observables* F *et* G *quelconques retient alors la forme suivante :* $\{F, G\} = \delta_F G$.

7. Il est possible, mais non obligatoire, de reformuler les résultats précédents en termes de formes différentielles : $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$ est une 2-forme inversible et fermée de $T^*\mathbb{R}^n$; elle est, en fait exacte puisque $\omega = d\alpha$ avec $\alpha = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$.

2.2.3 Transformations canoniques

Définition intrinsèque

Les équations de Hamilton (2.2.7) on été écrites dans un système de coordonnées $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ particulier de l'espace des phases $T^*\mathbb{R}^n$. Est-il possible de déterminer un changement de coordonnées $f : T^*\mathbb{R}^n \to T^*\mathbb{R}^n$ tel que $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ et tel que les équations de Hamilton retiennent la même forme dans les deux systèmes de coordonnées ? à savoir

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{p}} & = & -\dfrac{\partial h}{\partial \mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} & = & +\dfrac{\partial h}{\partial \mathbf{p}} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{P}} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}} \\ \dot{\mathbf{Q}} & = & +\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \end{array} \right. \tag{2.2.12}$$

avec l'expression suivante de l'hamiltonien dans les deux systèmes de coordonnées

$$h(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H(\mathbf{P}, \mathbf{Q}). \tag{2.2.13}$$

Un tel changement de coordonnées $x \mapsto X = f(x)$ doit être différentiable et (localement) inversible, $x = f^{-1}(X)$, et préserver la forme symplectique (2.2.8), c'est-à-dire

$$\omega(\delta x, \delta' x) \equiv \omega(\delta X, \delta' X) \tag{2.2.14}$$

pour préserver la forme des équations de Hamilton associées au hamiltonien (2.2.13).

Définition 2.2.7. *On appelle* ***transformation canonique***[8] *toute application différentiable $f : x \mapsto X$ de $T^*\mathbb{R}^n$ qui invarie la forme symplectique ω selon (2.2.14).*

Exercice 2.2.8. *A quelle condition une transformation linéaire $A : x \mapsto X = Ax$ de $\mathbb{R}^2$ est-elle une transformation canonique ?*

Exercice 2.2.9. *Soit $q \mapsto Q(q)$ une fonction monotone, $Q'(q) \neq 0$, d'une variable réelle. Vérifier que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (p, q) \mapsto (P = p/Q'(q), Q(q))$ est une transformation canonique.*[9]

8. On dit aussi *symplectomorphisme*.
9. Les transformations canoniques introduites dans cet exercice se généralisent au cas d'un

Démonstration. On a $P\delta Q = (p/Q'(q))\delta Q(q) = (p/Q'(q))Q'(q)\delta q = p\delta q$. Donc $\delta P\delta' Q - \delta' P\delta Q \equiv \delta p\delta' q - \delta' p\delta q$, d'où (2.2.14). □

Introduisons maintenant la notion utile de fonction génératrice d'une transformation canonique.

Lemme 2.2.10. *Soit $x \mapsto X$ une transformation de $T^*\mathbb{R}^n$ telle que*

$$\alpha(\delta X) = \alpha(\delta x) + \delta F \tag{2.2.15}$$

pour une certaine fonction différentiable $F : T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de l'espace des phases.[10] *Cette transformation est* **automatiquement** *une transformation canonique ; on appelle F* ***fonction génératrice*** *de cette transformation canonique.*

Démonstration. On a $\omega(\delta X, \delta' X) = \delta\alpha(\delta' X) - \delta'\alpha(\delta X) = \delta(\alpha(\delta' X)) - \delta'(\alpha(\delta X)) - \alpha(\delta\delta' X - \delta'\delta X)$. Alors $\omega(\delta X, \delta' X) = \omega(\delta x, \delta' x) + (\delta\delta' F - \delta'\delta F) - (\delta\delta' F - \delta'\delta F) = \omega(\delta x, \delta' x)$. □

Nous pouvons donc écrire, en particulier,

$$\mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{Q} - \mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{q} = \delta F \tag{2.2.16}$$

ce qui implique que la fonction génératrice est, ici, une fonction $F(\mathbf{Q}, \mathbf{q})$ telle que

$$\mathbf{P} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} \qquad \& \qquad \mathbf{p} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}. \tag{2.2.17}$$

Exercice 2.2.11. *Trouver la transformation canonique définie par la fonction génératrice suivante : $F(\mathbf{Q}, \mathbf{q}) = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{q} \rangle$.*

Démonstration. On trouve, grâce à (2.2.17), $\mathbf{P} = \mathbf{q}$ et $\mathbf{p} = -\mathbf{Q}$. Il vient donc $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (\mathbf{q}, -\mathbf{p})$ qui est bien une transformation canonique.[11] □

---

nombre arbitraire n de degrés de liberté. En effet, soit $Q : \mathbf{q} \mapsto \mathbf{Q} = Q(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une transformation différentiable et d'inverse différentiable, on montre (exercice !) que la transformation de $T^*\mathbb{R}^n$ suivante $f : (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ où

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}\left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}\right)^{-1}$$

est une transformation canonique.

10. On supposera F au moins deux fois différentiable.

11. En effet, on a $\delta\mathbf{P} \cdot \delta'\mathbf{Q} - \delta'\mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{Q} = \delta\mathbf{q} \cdot \delta'(-\mathbf{p}) - \delta'\mathbf{q} \cdot \delta(-\mathbf{p}) = \delta\mathbf{p} \cdot \delta'\mathbf{q} - \delta'\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{q}$.

Exemple de l'oscillateur harmonique

Traitons ici un cas exemplaire, celui de l'oscillateur harmonique à un degré de liberté caractérisé par une masse $m > 0$ et une pulsation propre $\omega > 0$.

L'hamiltonien du système est, on le sait,

$$h(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\,q^2 \tag{2.2.18}$$

et la fonction génératrice envisagée de la forme suivante

$$F(Q,q) = -\frac{m\omega}{2}\,q^2 \mathrm{cotg} Q. \tag{2.2.19}$$

On trouve aisément, en utilisant (2.2.17),

$$P = \frac{m\omega}{2\sin^2 Q}\,q^2 \geq 0 \qquad \& \qquad p = m\omega q\,\mathrm{cotg} Q,$$

c'est-à-dire

$$p = \sqrt{2mP\omega}\cos Q \qquad \& \qquad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q, \tag{2.2.20}$$

formule qui définit la transformation canonique inverse : $(P,Q) \mapsto (p,q)$.

L'hamiltonien prend alors la forme suivante

$$\begin{aligned} h(p,q) &= \frac{1}{2m}\left[\sqrt{2mP\omega}\cos Q\right]^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left[\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q\right]^2 \\ &= \omega P\cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q \\ &= \omega P. \end{aligned}$$

D'où, en définitive, cf. (2.2.18),

$$h(p,q) = H(P,Q) = \omega P. \tag{2.2.21}$$

La forme symplectique étant invariante par construction, les équations de Hamilton dans les nouvelles coordonnées donnent alors une forme très simple aux équations du mouvement

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \\ \dot{Q} &= +\frac{\partial H}{\partial P} = \omega \end{aligned} \right. \tag{2.2.22}$$

qui permet une intégration immédiate

$$P(t) = P(0) \qquad \& \qquad Q(t) = \omega t + Q(0). \tag{2.2.23}$$

Remarquons, pour terminer, que $P = H/\omega$ est une constante homogène à une énergie/fréquence et représente l'**action** du système tandis que Q représente la phase, ou **angle** $Q(t) = \theta(t)$, du système puisque, grâce à (2.2.20) et (2.2.23),

$$q(t) = \sqrt{\frac{2h}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \theta(0))$$

représente bien la trajectoire de l'oscillateur harmonique déterminée par les valeurs initiales des variables action-angle.

Chapitre 3

Mécanique des systèmes en repères mobiles

3.1 Le groupe euclidien

3.1.1 Espace euclidien

On appelle **espace affine** associé à un espace vectoriel (réel) V^n de dimension n un ensemble A^n muni d'une action (i) libre et (ii) transitive du groupe additif $(V^n, +)$. Ceci signifie que l'on s'est donné une loi $A^n \times V^n \to A^n : (M, \mathbf{v}) \mapsto M + \mathbf{v}$ vérifiant $(M + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \equiv M + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ et telle que

– (i) $M + \mathbf{v} = M \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$,

– (ii) si $M, N \in A^n$ il existe un unique vecteur $\mathbf{v} \in V^n$ tel que $N = M + \mathbf{v}$.

On note

$$\mathbf{MN} \equiv N - M = \mathbf{v} \tag{3.1.1}$$

le vecteur d'origine M et d'extrémité N associé au *bipoint* (M, N).

Nous voyons donc que l'on peut identifier A^n et V^n dès qu'un point $O \in A^n$ a été choisi : l'isomorphisme (affine !) $A^n \to V^n$ est alors donné par

$$M \mapsto \mathbf{OM}.$$

La définition suivante nous apprend à repérer les points d'un espace affine.

Définition 3.1.1. *On appelle* ***repère*** *(affine) d'un espace affine* (A^n, V^n) *un couple* $\mathcal{R} = (O, S)$ *formé d'une "origine"* $O \in A^n$ *et d'une base* $S = (\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n)$ *de* V^n.[1] *Les coordonnées* $\mathbf{r} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ *d'un point* M*, dans ce repère, sont définies par*

$$\begin{aligned} M &= \mathcal{R}\mathbf{r} \\ &= O + S\mathbf{r} \\ &= O + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i\, x^i. \end{aligned}$$

Exercice 3.1.2. *Montrer que les changements de repères affines forment un groupe, le* ***groupe affine*** *composé des matrices* $(n+1) \times (n+1)$ *de la forme*

$$a = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.1.2}$$

où $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$*, le groupe multiplicatif des matrices réelles* $n \times n$ *inversibles, et* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Définition 3.1.3. *On appelle* ***produit scalaire euclidien*** *d'un espace vectoriel* V^n *toute application bilinéaire symétrique non dégénérée positive :*

$$g : V^n \times V^n \to \mathbb{R}$$

c'est-à-dire vérifiant

1. $g(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \lambda_1\, g(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + \lambda_2\, g(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
2. $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{w}, \mathbf{v})$
3. $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ *pour tout* $\mathbf{w} \in V^n$ *ssi* $\mathbf{v} = 0$
4. $\|\mathbf{v}\|^2 := g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ *[et* $\|\mathbf{v}\| = 0$ *ssi* $\mathbf{v} = 0$*].*

pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *et* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V^n$.

Définition 3.1.4. *Nous dirons qu'une base* $S = (\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n)$ *est* ***orthonormée*** *si*

$$g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \tag{3.1.3}$$

pour tous $i, j = 1, \ldots, n$.[2]

---

1. Une base est un isomorphisme linéaire $S : \mathbb{R}^n \to V^n$.
2. On désigne par δ_{ij} le symbole de Kronecker, égal à 1 si $i = j$ et à 0 sinon.

On note $g(\mathbf{v},\mathbf{w}) \equiv \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$ le produit scalaire euclidien **canonique** de $\mathbb{R}^n$ donné par

$$\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \overline{\mathbf{v}}\,\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} v^i\, w^i \tag{3.1.4}$$

en désignant par une barre la *transposition.* [3]

Nous pouvons maintenant donner la définition générale d'un espace euclidien.

Définition 3.1.5. *On appelle* ***espace euclidien*** *tout espace affine E^n dont l'espace vectoriel associé est un espace euclidien (V^n, g).*

Si une base S orthonormée de V^n est donnée on notera

$$g(\delta\mathbf{M}, \delta'\mathbf{M}) = \langle \delta\mathbf{r}, \delta'\mathbf{r}\rangle \tag{3.1.5}$$

le produit scalaire de deux vecteurs $\delta\mathbf{M}, \delta'\mathbf{M} \in V^n$ d'origine $M \in E^n$ et de composantes $\delta\mathbf{r}, \delta'\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ dans cette base.

3.1.2 Isométries euclidiennes

Le groupe orthogonal

Considérons l'ensemble des matrices $n \times n$ réelles, A, inversibles, dont l'inverse est égal à la transposée, c'est-à dire telles que

$$A^{-1} = \overline{A}. \tag{3.1.6}$$

Ces matrices forme un *groupe*. En effet, $A = \mathbf{1}$ (la matrice identité) vérifie bien (3.1.6) et sera clairement l'élément neutre. De plus, si A et B sont deux telles matrices, il

3. La transposée $\overline{A}$ d'une matrice A à m lignes et n colonnes est la matrice à n lignes et m colonnes obtenue en échangeant lignes et colonnes de A, i.e. $(\overline{A})^i_j = A^j_i$ pour tous $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$.

En particulier le transposé d'un vecteur

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

est le covecteur

$$\overline{\mathbf{v}} = (v^1 \ldots v^n) \in (\mathbb{R}^n)^*.$$

en va de même de leur produit (matriciel) : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \overline{B}\,\overline{A} = \overline{AB}$. Enfin l'inverse $B = A^{-1}$ de A vérifie bien $B^{-1} = A = \overline{A^{-1}} = \overline{B}$. Remarquons que les matrices (3.1.6) sont telles que $\det(A)^2 = 1$.

Définition 3.1.6. *On appelle* ***groupe orthogonal*** *le groupe*

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in L(\mathbb{R}^n) \,|\, \overline{A}A = \mathbf{1}\}$$

Le sous-groupe

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \,|\, \det(A) = 1\} \tag{3.1.7}$$

est le ***groupe des rotations*** *euclidiennes* $\mathbb{R}^n$ *(ou groupe Spécial Orthogonal).*

Les transformations de $\mathbb{R}^n$ données par les matrices orthogonales préservent le produit scalaire euclidien ; on a bien $\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \overline{A}A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Le groupe orthogonal est un groupe d'*isométries.* [4]

Rappelons que l'espace $\mathbb{R}^n$ est orienté par le choix d'une *forme volume* ; un choix traditionnel est donné, pour n vecteurs $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$, par le volume suivant

$$\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det(\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n) \tag{3.1.8}$$

c'est-à-dire par le déterminant de la matrice $n \times n$ dont les colonnes sont constituées des n vecteurs considérés.

Remarque 3.1.7. *Rappelons que dans le cas* $n = 3$ *on a la relation suivante*

$$\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3\rangle \tag{3.1.9}$$

entre forme volume, produit scalaire et produit vectoriel.

Proposition 3.1.8. *Toute matrice de rotation* $A \in \mathrm{SO}(3)$ *est de la forme*

$$A = (\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}) \tag{3.1.10}$$

où $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *sont des vecteurs unitaires,* $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$*, et orthogonaux,* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$*, et où* $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$*.*

4. Transformations qui préservent la métrique (alias le produit scalaire).

Le cas $n = 3$ est, par ailleurs, d'une importance toute particulière en mécanique du solide ; illustrons-le par l'exercice suivant.

Exercice 3.1.9. *Désigner, parmi les matrices suivantes, celles qui sont des rotations euclidiennes et celles qui sont des matrices orthogonales :*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les **rotations**, matrices orthogonales A de déterminant positif, **préservent l'orientation** de l'espace : $\mathrm{vol}(A\mathbf{u}, A\mathbf{v}, A\mathbf{w}) \equiv \det(A)\mathrm{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv \mathrm{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ puisque $\det(A) = 1$.

Les **symétries**, matrices orthogonales S de déterminant négatif, **renversent l'orientation** : $\mathrm{vol}(S\mathbf{u}, S\mathbf{v}, S\mathbf{w}) \equiv -\mathrm{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ puisque $\det(S) = -1$.

Le groupe des translations

Si l'on considère un espace euclidien E^n modelé sur $\mathbb{R}^n$ et muni du produit scalaire g, alors les translations (3.1.1),

$$M \mapsto M^* = M + \mathbf{b}$$

avec $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, préservent le produit scalaire (3.1.5) car $\delta\mathbf{M}^* = \delta\mathbf{M}$ puisque $\mathbf{b}$ est un vecteur constant, c'est-à-dire $g(\delta\mathbf{M}, \delta'\mathbf{M}) \equiv g(\delta\mathbf{M}^*, \delta'\mathbf{M}^*)$ ou encore, si $\delta\mathbf{r}$ (resp. $\delta\mathbf{r}^*$) représente $\delta\mathbf{M}$ (resp. $\delta\mathbf{M}^*$) dans une base orthonormée,

$$\langle \delta\mathbf{r}, \delta'\mathbf{r} \rangle \equiv \langle \delta\mathbf{r}^*, \delta'\mathbf{r}^* \rangle. \tag{3.1.11}$$

Les isométries euclidiennes

Nous pouvons conclure que les transformations d'un espace euclidien (E^n, g) de la forme

$$\boxed{\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}^* = A\mathbf{r} + \mathbf{b} \qquad \text{où} \qquad A \in \mathrm{O}(n) \quad \& \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n} \tag{3.1.12}$$

sont des **isométries**, i.e. préservent le produit scalaire g. Ce sont des transformations affines (3.1.2) particulières. Nous admettrons le résultat suivant :

Théorème 3.1.10. *Les isométries d'un espace euclidien (E^n, g) sont constituées des transformations (3.1.12) qui forment un groupe appelé le* ***groupe euclidien*** *:*

$$\mathrm{E}(n) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{array} \right) \middle| A \in \mathrm{O}(n), \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \right\}. \tag{3.1.13}$$

Le sous-groupe des transformations euclidiennes qui préservent l'orientation est appelé ***groupe spécial euclidien*** *:*

$$\mathrm{SE}(n) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{array} \right) \middle| A \in \mathrm{SO}(n), \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \right\}. \tag{3.1.14}$$

Exercice 3.1.11. *Expliciter la loi de groupe du groupe euclidien : (0) donner l'élément neutre, (i) calculer le composé $(A'', \mathbf{b}'')$ de $(A, \mathbf{b})$ et $(A', \mathbf{b}')$ et (ii) trouver $(A, \mathbf{b})^{-1}$.*

3.2 Changements de référentiels non inertiels

3.2.1 Prolégomènes

L'espace-temps non relativiste est, on le sait, un espace galiléen, i.e. un espace affine, A^4, muni (i) d'une fonction temps absolu $t : A^4 \to A^1$ et (ii) d'une structure d'espace euclidien $E^3 = (A^3, g_t)$ sur chaque espace instantané $t = \mathrm{const}$.

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ où un événement d'espace-temps est représenté par sa position et sa date,

$$M = \mathcal{R} \left(\begin{array}{c} \mathbf{r} \\ t \end{array} \right)$$

avec $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$g_t(\delta\mathbf{M}, \delta'\mathbf{M}) = \langle \delta\mathbf{r}, \delta'\mathbf{r} \rangle \qquad \text{si} \qquad \delta t = \delta' t = 0 \tag{3.2.1}$$

et dt désigne la différentielle donnant l'intervalle de temps entre deux événements.

Les symétries galiléennes, c'est-à-dire les transformations différentiables d'espace-temps $M \mapsto M^*$ préservant la structure "métrique" galiléenne (g_t, dt) et l'orientation

spatiale des espaces $t = \text{const.}$ sont donc données par

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{r}^* = A(t)\mathbf{r} + \mathbf{b}(t) \\ t^* = t + e \end{pmatrix} \tag{3.2.2}$$

où, cf. (3.1.13), les matrices $A(t) \in \mathrm{SO}(3)$ et les vecteurs $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^3$ peuvent maintenant, grâce à (3.2.1), dépendre arbitrairement du temps ; d'autre part $e \in \mathbb{R}$ désigne une translation temporelle (solution générale de l'équation $dt^* = dt$).

Définition-Théorème 3.2.1. *Les transformations (3.2.2) forment un groupe (de dimension infinie) ; le sous-groupe formé des transformations préservant les espaces instantanés $t = \text{const.}$, i.e.*

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{r}^* = A(t)\mathbf{r} + \mathbf{b}(t) \\ t^* = t \end{pmatrix}} \tag{3.2.3}$$

*est donc le groupe des fonctions $(A, \mathbf{b}) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{SE}(3))$ appelé **groupe de Coriolis** ou groupe des transformations non inertielles.*

Enonçons maintenant un résultat fort utile.

Lemme 3.2.1. *Soit $A(t) \in \mathrm{SO}(n)$ une matrice de rotation dépendant différentiablement du temps t. La matrice $Z(t) = \dot{A}(t)A(t)^{-1}$ est alors antisymétrique, c'est-à-dire $Z(t) + \overline{Z(t)} = 0$. Dans le cas $n = 3$, on a*

$$\boxed{\dot{A}(t)A(t)^{-1} = j(\boldsymbol{\omega}(t))} \tag{3.2.4}$$

*où $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbb{R}^3$ est appelé **vecteur instantané de rotation** et*

$$\boxed{j\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix}} \tag{3.2.5}$$

Démonstration. Puisque $\overline{A}A = A\overline{A} = \mathbf{1}$, on a $d(A\overline{A})/dt = 0$ et on trouve, par conséquent, $(dA/dt)\overline{A} + A(d\overline{A}/dt) = (dA/dt)A^{-1} + \overline{(dA/dt)A^{-1}} = Z + \overline{Z} = 0$. Dans le cas n=3, on vérifie directement que les matrices 3×3 antisymétriques sont bien de la forme générale (3.2.5). □

Exercice 3.2.2. *Déterminer le vecteur instantané de rotation* $\boldsymbol{\omega}$ *de la matrice* A *de l'Exercice 3.1.9 dépendant du temps via une fonction* $\theta(t)$.

Exercice 3.2.3. *Vérifier que le produit vectoriel de* $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}' \in \mathbb{R}^3$ *est donné par*

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}' = j(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}'} \tag{3.2.6}$$

Exercice 3.2.4. *Montrer que le double produit vectoriel*

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\omega}'') = \boldsymbol{\omega}'\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}'' \rangle - \boldsymbol{\omega}''\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}' \rangle \tag{3.2.7}$$

de trois vecteurs $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}'' \in \mathbb{R}^3$ *est donné par*

$$j(\boldsymbol{\omega})j(\boldsymbol{\omega}') = \boldsymbol{\omega}'\,\overline{\boldsymbol{\omega}} - \overline{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{\omega}'. \tag{3.2.8}$$

Exercice 3.2.5. *Vérifier l'identité suivante*

$$j(\boldsymbol{\omega})j(\boldsymbol{\omega}') - j(\boldsymbol{\omega}')j(\boldsymbol{\omega}) = j(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}') \tag{3.2.9}$$

pour tous $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}' \in \mathbb{R}^3$.

Nous utiliserons enfin le résultat précieux :

Proposition 3.2.6. *Soient* $A \in \mathrm{SO}(3)$ *et* $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$, *on a alors*

$$Aj(\boldsymbol{\omega})A^{-1} = j(A\boldsymbol{\omega}). \tag{3.2.10}$$

Démonstration. Nous avons, pour toute matrice $A \in \mathrm{O}(3)$ et tous $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\langle A\mathbf{u}, A\boldsymbol{\omega} \times A\mathbf{v} \rangle &= \mathrm{vol}(A\mathbf{u}, A\boldsymbol{\omega}, A\mathbf{v}) \\
&= \det(A)\mathrm{vol}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) \\
&= \det(A)\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \rangle
\end{aligned}$$

et, grâce à (3.1.6) et (3.1.9), on obtient $\langle \mathbf{u}, A^{-1}j(A\boldsymbol{\omega})A\mathbf{v}) \rangle = \det(A)\langle \mathbf{u}, j(\boldsymbol{\omega})\mathbf{v} \rangle$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire

$$A^{-1}j(A\boldsymbol{\omega})A = \det(A)j(\boldsymbol{\omega}) \qquad \text{si} \qquad A \in \mathrm{O}(3). \tag{3.2.11}$$

Le fait que $\det(A) = 1$ si $A \in \mathrm{SO}(3)$ achève la preuve. □

3.2.2 Considérations mécanistes

Introduisons maintenant ces transformations sous une forme moins abstraite qui utilise un solide de référence “fixe” dans l'espace tridimensionnel $\mathbb{R}^3$ associé à un référentiel galiléen ; notons O le point du solide correspondant à l'origine $\mathbf{r} = 0$ et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$; le référentiel euclidien $\mathcal{R} = (0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sert à repérer les points M de l'espace et on note $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ le rayon vecteur d'origine O et d'extrémité M. Attachons maintenant un référentiel euclidien $\mathcal{R}' = (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ à un autre solide évoluant dans l'espace au cours du temps t.

Comment repérer le même point M relativement au référentiel mobile $\mathcal{R}'$?

Ecrivons la relation de Chasles $\mathbf{OM} = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'M}$, ou encore $\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{r}'$ en notant $\mathbf{b} = \mathbf{OO'}$ le changement d'origine et $\mathbf{r}' \equiv \mathbf{r}_{\mathrm{rel}} = \mathbf{O'M}$ la **position relative** du point M par rapport à O'. On désigne *traditionnellement* par $\mathbf{R}$ les coordonnées du vecteur $\mathbf{r}_{\mathrm{rel}}$ dans la base $(\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)A$ déduite de la base originelle (canonique) par une rotation A.[5] On a alors

$$\mathbf{r}_{\mathrm{rel}} = A\mathbf{R}. \tag{3.2.12}$$

Soulignons que rotations et translations sont en réalité des fonctions $A(t) \in \mathrm{SO}(3)$ et $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^3$ du temps t (fonctions que nous supposerons différentiables) puisque le deuxième solide de référence est mobile au cours du temps.

En résumé, les coordonnées, $\mathbf{r}$, du point M dans le repère “fixe” et ses coordonnées, $\mathbf{R}$, dans le repère mobile sont reliées par la formule simple

$$\mathbf{r} = A(t)\mathbf{R} + \mathbf{b}(t) \tag{3.2.13}$$

qui n'est rien d'autre que l'expression de la transformation de Coriolis (3.2.3) — à un changement de notation près.

Appliquons maintenant les résultats précédents au calcul de loi de transformation de la vitesse et de l'accélération sous un changement de référentiel correspondant à une transformation de Coriolis (3.2.13).

5. Nous identifierons la matrice de rotation A à la base mobile $(\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3)$ puisque $(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3) = \mathbf{1}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3.2.3 Loi de transformation de la vitesse

Si un point matériel se déplace dans le repère “fixe” sur une trajectoire $M(t)$, sa vitesse “absolue” est, bien sûr, $\mathbf{v}(\equiv \mathbf{v}_{\mathrm{abs}}) = \dot{\mathbf{r}}$. Quid de sa vitesse relative

$$\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = A\dot{\mathbf{R}}, \tag{3.2.14}$$

i.e. de sa vitesse relativement au repère mobile ?

En différentiant (3.2.13) par rapport au temps, il vient

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{A}\mathbf{R} + A\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{b}} \\ &= \dot{A}A^{-1}A\mathbf{R} + A\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{b}} \\ &= j(\boldsymbol{\omega})A\mathbf{R} + A\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{b}} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}} + A\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{b}} \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

grâce à la définition (3.2.4) du vecteur instantané de rotation dont on note $\boldsymbol{\omega}(t)$ les composantes dans le repère fixe.

Proposition 3.2.7. *La vitesse absolue,* $\mathbf{v}$*, d'un point matériel est reliée à sa vitesse relative,* $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$ *(définie par (3.2.14)), par l'expression suivante*

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}} + \dot{\mathbf{b}}} \tag{3.2.16}$$

Exercice 3.2.8. *Montrer que la loi (3.2.16) de transformation de la vitesse se lit de la manière suivante*

$$\mathbf{v} = A\left(\dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} + A^{-1}\dot{\mathbf{b}}\right) \tag{3.2.17}$$

en terme des composantes dans le repère mobile ; on a posé

$$\boldsymbol{\omega} = A\boldsymbol{\Omega} \tag{3.2.18}$$

pour définir les composantes $\boldsymbol{\Omega}$ *du vecteur instantané de rotation dans le repère mobile.*

3.2.4 Loi de transformation de l'accélération

Nous pouvons maintenant tirer avantage des résultats précédents concernant la loi de transformation de la vitesse lors d'un changement de référentiel non inertiel pour déterminer celle de l'accélération.

L'accélération absolue du point matériel est, bien entendu, $\mathbf{a}(\equiv \mathbf{a}_{\mathrm{abs}}) = \ddot{\mathbf{r}}$. Comme en (3.2.14), définissons naturellement l'accélération relative du point par rapport au repère mobile selon

$$\mathbf{a}_{\mathrm{rel}} = A\ddot{\mathbf{R}}. \tag{3.2.19}$$

Proposition 3.2.9. *L'accélération absolue,* $\mathbf{a}$*, d'un point matériel est reliée à son accélération relative,* $\mathbf{a}_{\mathrm{rel}}$ *(définie par (3.2.19)), par l'expression suivante*

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\mathrm{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{rel}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}}) + \ddot{\mathbf{b}}} \tag{3.2.20}$$

Démonstration. En différentiant (3.2.15) par rapport au temps t, il vient

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}} &= j(\dot{\boldsymbol{\omega}})A\mathbf{R} + j(\boldsymbol{\omega})\dot{A}\mathbf{R} + j(\boldsymbol{\omega})A\dot{\mathbf{R}} + \dot{A}\dot{\mathbf{R}} + A\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\mathbf{b}} \\
&= j(\dot{\boldsymbol{\omega}})A\mathbf{R} + j(\boldsymbol{\omega})j(\boldsymbol{\omega})A\mathbf{R} + j(\boldsymbol{\omega})A\dot{\mathbf{R}} + j(\boldsymbol{\omega})A\dot{\mathbf{R}} + A\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\mathbf{b}} \\
&= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times A\mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times A\mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\omega} \times A\dot{\mathbf{R}} + A\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\mathbf{b}} \\
&= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{rel}} + \mathbf{a}_{\mathrm{rel}} + \ddot{\mathbf{b}}
\end{aligned}$$

grâce aux définitions ci-dessus de la position, vitesse et accélération relatives. □

Exercice 3.2.10. *Montrer que la loi (3.2.20) de transformation de l'accélération se lit de la manière suivante*

$$\mathbf{a} = A\left(\ddot{\mathbf{R}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) + A^{-1}\ddot{\mathbf{b}}\right) \tag{3.2.21}$$

en terme des composantes dans le repère mobile.

Démonstration. Indication : utiliser (3.2.17). □

3.2.5 Forces inertielles : introduction générale

Considérons un point matériel de masse m, soumis, à l'action d'une force dont l'expression est $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ dans un référentiel inertiel donné. Comment formuler les équations du mouvement du système dans un référentiel non inertiel déduit du précédent par une transformation (3.2.13) ? Il suffit simplement d'utiliser le résultat fondamental donné par l'expression (3.2.20) !

La deuxième loi de Newton

$$m\mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{3.2.22}$$

peut se réécrire, grâce à (3.2.20), comme

$$\mathbf{f} = m\left(\mathbf{a}_{\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\text{rel}}) + \ddot{\mathbf{b}}\right),$$

ou encore comme

$$\boxed{m\mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{f} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{\text{rel}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\text{rel}}) - m\ddot{\mathbf{b}}} \tag{3.2.23}$$

en mettant en évidence de nouvelles forces intervenant dans la formulation des équations du mouvement en référentiel accéléré, les **forces d'inertie**. [6]

Définition-Théorème 3.2.2. *Les équations gouvernant le mouvement d'une particule de masse m se formulent comme suit dans un référentiel non inertiel*

$$m\mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{f}_{\text{rel}} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_{\text{Cor}} + \mathbf{f}_{\text{centrif}} + \mathbf{f}_{\text{ent}} \tag{3.2.24}$$

où les forces d'inertie sont respectivement[7]

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{Cor}} &= -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} && \text{(force de Coriolis)} \\ \mathbf{f}_{\text{centrif}} &= -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\text{rel}}) && \text{(force centrifuge)} \\ \mathbf{f}_{\text{ent}} &= -m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{\text{rel}} - m\ddot{\mathbf{b}} && \text{(force d'entrainement)} \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

6. On rencontre aussi le terme “forces fictives” dans la littérature ancienne ; cette terminologie est trompeuse car les forces d'inertie sont des forces bien réelles comme chacun peut en faire l'expérience dans la vie courante.

7. Attention ! Les formules (3.2.25) donnent bien les composantes des forces inertielles, mais exprimées dans le repère . . . fixe !

Déduisons enfin de (3.2.23) une formulation alternative des équations du mouvement dans un référentiel accéléré arbitraire.

Théorème 3.2.11. *Les équations gouvernant le mouvement d'une particule de masse m se formulent comme suit dans un référentiel non inertiel*

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{R}} - m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{R} - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) - mA^{-1}\ddot{\mathbf{b}}} \tag{3.2.26}$$

en terme des grandeurs cinématiques et dynamiques relatives, où $\mathbf{F}$ *défini par*

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = A(t)\,\mathbf{F}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t) \tag{3.2.27}$$

représente les composantes de la force extérieure dans le référentiel mobile.

Exercice 3.2.12. *Désignons par* $\mathbf{g}$ *le champ de gravitation newtonien de la terre. Un pendule est au repos par rapport à la terre, au voisinage du sol ; déterminer son accélération relative* $\mathbf{a}_{\mathrm{rel}}$ *en fonction de* $\mathbf{g}$*, de la vitesse angulaire* $\boldsymbol{\omega}$ *de la terre lors de son mouvement diurne et de la position* $\mathbf{r}_{\mathrm{rel}} = \mathrm{const.}$ *du pendule. En déduire l'expression* $g(\lambda)$ *de l'intensité de l'accélération de la pesanteur sur terre en fonction de la latitude* λ*, de la vitesse angulaire* $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$*, du rayon* R *de la terre et de la valeur de* $g_0 = g(\pm\pi/2)$ *aux pôles.* $\mathcal{N}.\mathcal{B}.$ *Négliger les termes* $\mathrm{O}(\omega^4)$*.*

Démonstration. Puisque $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = 0$ et $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{const.}$ (la vitesse angulaire de la terre par rapport à un référentiel “fixe” copernicien est constante) et $\mathbf{b} = 0$, (3.2.23) nous donne $\mathbf{a}_{\mathrm{rel}} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}})$. Alors $g^2 = \|\mathbf{a}_{\mathrm{rel}}\|^2 \cong \|\mathbf{g}\|^2 - 2\langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}})\rangle$ en négligeant des termes d'ordre 4 en $\omega = 2\pi/(24\mathrm{h}) \cong 7{,}27\,10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$. On obtient donc $g^2 \cong g_0^2 - 2\langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\omega}\rangle\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{\mathrm{rel}}\rangle + 2\omega^2\langle \mathbf{g}, \mathbf{r}_{\mathrm{rel}}\rangle$ grâce à (3.2.7) et au fait que $g_0 = \|\mathbf{g}\|$ aux pôles où $\mathbf{r}_{\mathrm{rel}} // \boldsymbol{\omega}$. Le champ $\mathbf{g} = -k\mathbf{r}_{\mathrm{rel}}/R^3$ étant central (ici $k = \mathrm{const.} > 0$), on a $\langle \mathbf{g}, \mathbf{r}_{\mathrm{rel}}\rangle = -g_0 R$ au voisinage du sol. Mais $\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{\mathrm{rel}}\rangle = \omega R \cos(\pi/2 - \lambda) = \omega R \sin\lambda$ et $\langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\omega}\rangle = g_0\omega\cos(\pi/2 + \lambda) = -g_0\omega\sin\lambda$. Alors $g^2 \cong g_0^2 + 2g_0\omega^2 R\sin^2\lambda - 2g_0\omega^2 R$ entraîne $g^2 \cong g_0^2 - 2g_0\omega^2 R\cos^2\lambda$, c'est-à-dire

$$g(\lambda) \cong g_0 - \omega^2 R\,\cos^2\lambda. \tag{3.2.28}$$

On vérifie que $g(\pm\pi/2) = g_0$ aux pôles et $g_{\min} = g(0) \cong g_0 - \omega^2 R$ à l'équateur. □

3.2.6 Exemple : chute libre et déviation vers l'est

Appliquons les résultats généraux précédents au cas de la chute libre dans les référentiels accélérés.

Nous présenterons ici le calcul de la trajectoire d'un point matériel en chute libre par rapport à un référentiel terrestre en rotation uniforme, autour de l'axe des pôles, de vitesse angulaire ω par rapport à un référentiel inertiel copernicien fixe.

Nous effectuerons l'intégration (approchée) des équations du mouvement de ce point matériel dans le repère mobile attaché à la terre défini par la matrice [8]

$$A = (\mathbf{e}_\theta \; \mathbf{e}_\varphi \; \mathbf{e}_r)$$

où (r, θ, φ) est un système de coordonnées polaires adapté au problème : le pôle Nord correspond à la colatitude $\theta = 0$ et le pôle Sud à $\theta = \pi$.

Le vecteur instantané de rotation terrestre est donné par $\boldsymbol{\omega} = \omega\, \mathbf{e}_3 = A\boldsymbol{\Omega}$ avec $\omega = \text{const.} > 0$, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.2.29}$$

Notons que le champ de gravitation est central et ... attractif, i.e.

$$\mathbf{G} = -g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.2.30}$$

où $g = \text{const.} > 0$ désigne l'intensité de l'accélération de la pesanteur au voisinage du sol.

Les équations du mouvement (3.2.26) s'écrivent alors

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{G} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \tag{3.2.31}$$

puisque $\boldsymbol{\Omega} = \text{const.}$ et $\mathbf{b} = 0$.

---

8. La matrice de changement de base $A \in \mathrm{SO}(3)$ est identifiée à la base mobile — orthonormée directe — attachée à la terre.

Nous nous proposons d'intégrer (3.2.31) en négligeant [9] les termes en $O(\omega^2)$. Les conditions initiales choisies seront $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$ et $\dot{\mathbf{R}}(0) = 0$, i.e. on étudie la trajectoire d'un point matériel lâché sans vitesse initiale d'un point $\mathbf{R}_0$. Les équations du mouvement seront donc approximées par

$$\ddot{\mathbf{R}} \cong \mathbf{G} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{R}}. \tag{3.2.32}$$

Posons a priori $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{G}t^2 + \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1(t)$ où $\mathbf{R}_1(t)$ désigne la petite déviation de trajectoire recherchée. Puisque $\|\mathbf{R}_1\| = O(\omega)$, on trouve que (3.2.32) entraîne $\ddot{\mathbf{R}}_1 \cong 2\mathbf{G}\times\boldsymbol{\Omega}\, t$ modulo des termes du second ordre en ω. Une intégration élémentaire donne $\dot{\mathbf{R}}_1 \cong \mathbf{G} \times \boldsymbol{\Omega}\, t^2$ puisque $\boldsymbol{\Omega}$ et $\mathbf{G}$ sont des vecteurs constants et $\dot{\mathbf{R}}_1(0) = 0$. Il vient alors $\mathbf{R}_1(t) \cong \mathbf{G} \times \boldsymbol{\Omega}\, t^3/3$ puisque $\mathbf{R}_1(0) = 0$. On obtient finalement la trajectoire suivante

$$\mathbf{R}(t) \cong \frac{1}{3}\mathbf{G} \times \boldsymbol{\Omega}\, t^3 + \frac{1}{2}\mathbf{G}\, t^2 + \mathbf{R}_0. \tag{3.2.33}$$

En introduisant la latitude $\lambda = \pi/2 - \theta$ du point considéré réécrivons (3.2.33) comme

$$\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_0 \cong \begin{pmatrix} 0 \\ g\omega\cos\lambda\,\dfrac{t^3}{3} \\ -g\,\dfrac{t^2}{2} \end{pmatrix} \tag{3.2.34}$$

pour mettre en évidence une **déviation vers l'est** dans l'hémisphère nord [10] par rapport à la verticale lors de la chute libre.

Exercice 3.2.13. *Déterminer la déviation vers l'est d'un point matériel lâché sans vitesse initiale du haut de la tour Eiffel, c'est-à-dire d'une altitude* $H \cong 275\,\mathrm{m}$. *On prendra* $\lambda \cong 49^o$ *et* $g \cong 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Démonstration. Posons $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ pour obtenir, grâce à la loi horaire (3.2.34), $Z - Z_0 = -H = -g\,t^2/2$, i.e. le temps de chute $t = \sqrt{2H/g}$. Mais, d'autre part, $Y - 0 = g\omega\cos\lambda\, t^3/3 = (g\omega/3)\cos\lambda[2H/g]^{3/2}$. $\mathcal{A.N.}$ On trouve $Y \cong +6,5\,\mathrm{cm}$. □

9. Nous avons vu que $\omega^2\,\mathrm{s}^2 \cong 5\,10^{-9}$.

10. La deuxième composante de $\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_0$ est positive pour tout $t > 0$ puisque $0 \leq \lambda \leq \pi/2$ dans cet hémisphère.

3.2.7 Exemple : le pendule de Foucault (1819-1868)

L'expérience du pendule de Foucault met en évidence de manière spectaculaire les effets de la force de Coriolis — due à la rotation diurne de la terre — sur le mouvement d'un pendule sphérique, par exemple le pendule de 67 m exposé au Panthéon (Paris).

"*Vous êtes invités à venir voir tourner la Terre.*"

Léon Foucault (1851)

Pour mettre en œuvre l'expression (3.2.26) de l'accélération relative du pendule de Foucault, nous négligerons comme précédemment les termes du second ordre en la vitesse angulaire ω de la terre ; nous supposerons, de plus, que le pendule effectue des oscillations de faible amplitude (petits mouvement) dans un plan $Z \cong$ const.

Si nous ne tenions pas compte des forces d'inertie, le mouvement du pendule, de longueur ℓ dans le champ de pesanteur terrestre $g =$ const. > 0, serait régi par les équations du mouvement d'un pendule oscillateur harmonique bidimensionnel, i.e.

$$\begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces équations du mouvement doivent maintenant être modifiées en utilisant (3.2.26) pour prendre en compte la vitesse instantanée de la terre (3.2.29) que l'on exprimera plutôt en terme de la latitude λ du pendule ; on a alors

$$\begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ 0 \end{pmatrix} \cong -\frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \Omega_X = -\omega \cos\lambda \\ \Omega_Y = 0 \\ \Omega_Z = \omega \sin\lambda \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient alors, en posant $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ pour la pulsation propre du pendule,

$$\ddot{X} - 2\Omega_Z \dot{Y} + \omega_0^2 X \cong 0, \tag{3.2.35}$$

$$\ddot{Y} + 2\Omega_Z \dot{X} + \omega_0^2 Y \cong 0, \tag{3.2.36}$$

ou encore, en posant $W = X + iY$,

$$\ddot{W} + 2i\Omega_Z \dot{W} + \omega_0^2 W \cong 0. \tag{3.2.37}$$

L'intégration de (3.2.38) est aisée : on obtient

$$W(t) \cong e^{-i\Omega_Z t}\,(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t) \tag{3.2.38}$$

où $A, B \in \mathbb{C}$ sont des constantes d'intégration.[11]

Le plan d'oscillation du pendule de Foucault possède donc une vitesse angulaire constante $\Omega = -\Omega_Z = -\omega\sin\lambda$ par rapport à la terre. Ce plan effectue ainsi une rotation de 360° pendant le temps

$$T = \frac{2\pi}{|\Omega|} = \frac{T_\oplus}{|\sin\lambda|} \tag{3.2.39}$$

où $T_\oplus$ désigne le jour sidéral (la période de rotation de la terre par rapport aux étoiles fixes).

$\mathcal{A}.\mathcal{N}.$ Le plan d'oscillation du pendule de Foucault du Musée des Arts et Métiers (Paris) a donc pour période $T = 23\,\mathrm{h}\,56'\,4''/\sin(48^o\,50') \cong 31\,\mathrm{h}\,48'$.

Remarque 3.2.14. *Noter que* $\Omega < 0$ *si* $0 < \lambda \leq 90^o$ *et donc que la rotation du plan d'oscillation du pendule s'effectue, dans l'hémisphère nord, dans le sens des aiguilles d'une montre. A l'équateur,* $\Omega = 0$, *le pendule de Foucault oscille dans un plan fixe.*

11. Signalons que la solution générale de (3.2.38) est, en fait, $W(t) \cong e^{-i\Omega_Z t}\,(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t)$ avec $A, B \in \mathbb{C}$ et $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_Z^2}$; mais $\omega_1 = \omega_0(1 + \mathrm{O}(\Omega_Z^2)) \cong \omega_0$.

Chapitre 4

Mécanique du solide

4.1 Dynamique des systèmes

Rappelons, afin de préparer à l'étude des équations de la mécanique de solide, les résultats fondamentaux concernant la dynamique des systèmes de points matériels en interaction mutuelle et soumis à l'action de forces extérieures. Nous nous proposons ici de rappeler les théorèmes généraux de la mécanique.

Considérons un système de N points matériels $M_1, \ldots, M_N$ de masses $m_1, \ldots, m_N$ évoluant dans l'espace euclidien E^3 sous l'effet de forces d'interaction mutuelles $\mathbf{f}_{12}, \ldots, \mathbf{f}_{N-1,N}$ et de forces extérieures $\mathbf{f}_1^{\text{ext}}, \ldots, \mathbf{f}_N^{\text{ext}}$. Nous supposerons que le référentiel dans lequel les forces sont ainsi exprimées est un référentiel inertiel "fixe".

4.1.1 Théorème général I

La force à laquelle est soumise le point M_i est alors

$$\mathbf{f}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \tag{4.1.1}$$

pour tout $i = 1, \ldots, N$. La force totale agissant sur le système

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \tag{4.1.2}$$

est, de fait, égale à la somme des forces extérieures en vertu de la *troisième loi de Newton* ou “Loi de l’action et de la réaction”

$$\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} = 0 \qquad \forall i \neq j = 1, \ldots, N \tag{4.1.3}$$

qui implique immédiatement $\sum_{i \neq j} \mathbf{f}_{ij} = 0$.

On rappelle que si $\mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_i$ désigne l’impulsion du point M_i à un instant donné, alors l’**impulsion totale** du système $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i$ vérifie l’équation différentielle

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}} \tag{4.1.4}$$

où $\mathbf{f}$ est la **force totale** extérieure (4.1.2). L’équation (4.1.4) résulte directement de la seconde loi de Newton : $m_i\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}_i$, pour tout $i = 1, \ldots, N$ et constitue le **Théorème général I**.

4.1.2 Théorème général II

Ayant choisi un référentiel inertiel, donc une origine O, nous pouvons définir le moment de la force au point M_i par $\mathbf{k}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i$ où $\mathbf{r}_i = \mathbf{OM}_i$ pour tout $i = 1, \ldots, N$. De même, le moment angulaire du point matériel M_i, d’impulsion $\mathbf{p}_i$ sera défini par $\boldsymbol{\ell}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ pour tout $i = 1, \ldots, N$. $\mathcal{N}.\mathcal{B}$. Ces quantités physiques dépendent explicitement de l’origine, O (on dit aussi *point de base*) choisie.

Le moment total des forces appliquées au système

$$\mathbf{k} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{k}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^{\mathrm{ext}} \tag{4.1.5}$$

est alors le moment total des seules forces extérieures. Ceci résulte encore de la troisième loi de Newton évoquée plus haut.

Si $\boldsymbol{\ell} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\ell}_i$ désigne maintenant le moment angulaire total du système par rapport au point O, à un instant donné, l’évolution temporelle de cette quantité est gouvernée par l’équation différentielle

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} = \mathbf{k}} \tag{4.1.6}$$

où $\mathbf{k}$ est le moment total (4.1.5) des forces extérieures. L'équation (4.1.6) résulte aussi de la seconde loi de Newton et constitue le **Théorème général II**.

Proposition 4.1.1. *Lors d'un changement d'origine* $\mathbf{b} = \mathbf{OO'}$*, le moment angulaire se transforme comme suit*

$$\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}' + \mathbf{b} \times \mathbf{p} \tag{4.1.7}$$

où $\boldsymbol{\ell}$ *(resp.* $\boldsymbol{\ell}'$*) désigne le moment angulaire par rapport à* O *(resp.* O'*) et* $\mathbf{p}$ *l'impulsion totale du système.*

Démonstration. On trouve aisément

$$\boldsymbol{\ell} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{OM}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{OO'} + \mathbf{O'M}_i) \times \mathbf{p}_i = \mathbf{OO'} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\ell}'$$

et donc le résultat attendu. □

Exercice 4.1.2. *Prouver l'on a, de même, la loi de transformation suivante pour le moment total des forces*

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{b} \times \mathbf{f}. \tag{4.1.8}$$

Définition 4.1.3. *On appelle* ***torseur*** *toute fonction* $M \mapsto (\mathbf{L}, \mathbf{P})$ *de l'espace euclidien* E^3 *à valeurs dans* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ *se transformant comme suit*

$$(\mathbf{L}', \mathbf{P}') = (\mathbf{L} + \mathbf{P} \times \mathbf{MM}', \mathbf{P}) \tag{4.1.9}$$

sous une translation $\mathbf{MM}'$.

Le couple $(\boldsymbol{\ell}, \mathbf{p})$ *est appelé* ***torseur cinétique*** *et* $(\mathbf{k}, \mathbf{f})$ *représente quant à lui le* ***torseur dynamique*** *du système de points matériels considéré.*

Exercice 4.1.4. *On appelle* ***couple*** *tout torseur dynamique* $(\mathbf{k}, \mathbf{f})$ *tel que* $\mathbf{f} = 0$ *; montrer que le moment des forces,* $\mathbf{k}$*, est indépendant du point de base.*

4.2 Configurations solides

Un solide est, par définition, un ensemble de points matériels "indéformable", c'est-à-dire dont tous les points restent à distance fixe les uns des autres au cours du temps.

Définition 4.2.1. *Un système de points matériels $M_1, \ldots, M_N$ est appelé* ***solide*** *si*

$$\|\mathbf{M}_i\mathbf{M}_j\| = \text{const.}$$

à chaque instant et pour tous $i, j = 1, \ldots, N$.

Nous étendons immédiatement cette définition au cas d'une distribution continue de masse (par exemple une toupie).

Définition 4.2.2. *Un système de points matériels $\mathcal{S} \subset E^3$ constitue un* ***solide*** *si*

$$\|\mathbf{MN}\| = \text{const.}$$

à chaque instant et pour tous $M, N \in \mathcal{S}$.

4.2.1 Espace de configuration

Comment maintenant fixer la *configuration* d'un solide ?

Supposons donné un référentiel "fixe" euclidien $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3))$. Pour déterminer la configuration d'un solide $\mathcal{S}$ par rapport à ce référentiel, il nous faut fixer *trois* points différents du solide, disons une origine $O' \in \mathcal{S}$ et deux autres points $M, N \in \mathcal{S}$ non tous trois alignés. Alors $\mathbf{O'M}$ et $\mathbf{O'N}$ sont indépendants. Soit $\mathbf{e}'_1$ la direction de $\mathbf{O'M}$ et $\mathbf{e}'_2$ celle de $\mathbf{O'M} \times \mathbf{O'N}$; la matrice $A = (\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3)$ avec $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2$ est, grâce à (3.1.10) une matrice de rotation, $A \in \mathrm{SO}(3)$, complètement déterminée par O', M, N qui fixent la configuration du solide.

Nous venons de prouver qu'une configuration d'un solide $\mathcal{S}$ est déterminée par une matrice de rotation $A = (\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3)$ définissant un repère orthonormé direct en un point O' lié au solide et par un vecteur $\mathbf{b} = \mathbf{OO'}$ donnant la position du point O' par rapport à l'origine, O, du référentiel fixe. [1]

1. Une configuration d'un solide est donc, en définitive, repère euclidien $\mathcal{R}' = (O', (\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3))$.

Proposition 4.2.3. *L'espace de configuration d'un solide est* $\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$.

Nous avons vu au chapitre précédent que cet espace n'est autre que le groupe (Spécial) euclidien, SE(3).

4.2.2 Champ de vitesse dans les solides

Nous pouvons tirer avantage des résultats obtenus dans le chapitre concernant les changements de référentiels non inertiels.

Le solide $\mathcal{S}$ est maintenant animé d'un certain mouvement et sa configuration à l'instant t est ainsi déterminée par un couple $(A(t), \mathbf{b}(t)) \in \mathrm{SE}(3)$.

Nous avons vu (cf. (3.2.16)) que la vitesse absolue, $\mathbf{v}$, d'un point $M \in \mathcal{S}$ du solide est donnée par $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{rel}} + \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}}$ où $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = 0$ est sa vitesse relative (**nulle** puisque le point M est **fixe** par rapport au solide), $\mathbf{b} = \mathbf{OO'}$ et $\mathbf{r}_{\mathrm{rel}} = \mathbf{O'M}$; ici $\boldsymbol{\omega}$ représente le vecteur instantané de rotation du (référentiel lié au) solide par rapport au référentiel fixe. On résume par la formule donnant la vitesse d'un point M du solide, à savoir $\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M}$. Les point M et O' étant arbitraires, nous avons prouvé la

Proposition 4.2.4. *La vitesse* $\mathbf{v}_M$ *d'un point* M *d'un solide et reliée à la vitesse* $\mathbf{v}_N$ *d'un autre point* N *par la relation suivante*

$$\boxed{\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_N + \mathbf{MN} \times \boldsymbol{\omega}} \tag{4.2.1}$$

où $\boldsymbol{\omega}$ *est le vecteur instantané de rotation du solide par rapport au référentiel fixe.*

Remarque 4.2.5. *Le vecteur instantané de rotation* $\boldsymbol{\omega}$ *ne dépend pas du choix d'une origine* O'*, il n'est défini que par la matrice de rotation* A*, cf. (3.2.4) ; la loi de transformation (4.2.1) montre alors que le couple* $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$ *est un torseur au sens de la Définition 4.1.3 : nous l'appellerons* ***torseur cinématique****.*

Exercice 4.2.6. *Prouver la propriété d'**équiprojectivité de la vitesse***

$$\langle \mathbf{v}_M, \mathbf{MN} \rangle = \langle \mathbf{v}_N, \mathbf{MN} \rangle$$

valable pour tous $M, N \in \mathcal{S}$.

4.3 Cinétique des solides

La notion qui remplace, dans le cas continu, la distribution de masse $(m_i)_{i=1,\ldots,N}$ est celle de **densité de masse**, fonction continue $\varrho : \mathcal{S} \to \mathbf{R}^+$ caractéristique de la composition physique du solide.

Définition 4.3.1. *On appelle masse du solide $(\mathcal{S}, \varrho)$ la quantité*

$$M = \int_{\mathcal{S}} \varrho(\mathbf{r})\, dV(\mathbf{r}) \tag{4.3.1}$$

où $dV(\mathbf{r}) = dx\,dy\,dz$ désigne l'élément de volume canonique de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 4.3.2. *Nous ferons l'hypothèse qu'un solide $\mathcal{S}$ est une partie compacte et orientée de l'espace E^3, donc de volume fini*

$$V = \int_{\mathcal{S}} dV(\mathbf{r}) < +\infty.$$

4.3.1 Centre d'inertie

Introduisons la notion importante de centre de masse d'un système (discret ou continu) de points matériels.

Définition 4.3.3. *On appelle **barycentre** $\mathbf{R}$ d'un ensemble $(M_i, m_i)_{i=1,\ldots,N}$ de points matériels, associé à une origine O, le vecteur*

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{r}_i \tag{4.3.2}$$

où $\mathbf{r}_i = \mathbf{OM}_i$ désigne le rayon vecteur du point M_i relativement à O et $M = \sum_{i=1}^N m_i$ la masse totale du système.

*Le **barycentre** d'un solide $(\mathcal{S}, \varrho)$ est, de même, défini par*

$$\boxed{\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int_{S} \varrho(\mathbf{r})\, \mathbf{r}\, dV(\mathbf{r})} \tag{4.3.3}$$

avec la définition (4.3.1) de la masse M du solide.

Définition 4.3.4. *On appelle* ***centre de masse*** *(ou encore* ***centre d'inertie****) d'un ensemble de points matériels le point G défini par*

$$\mathbf{OG} = \mathbf{R} \tag{4.3.4}$$

où $\mathbf{R}$ désigne le barycentre du système relativement au point O.

Remarquons que le centre de masse G est, contrairement au barycentre, indépendant du choix d'une origine O.

Exercice 4.3.5. *Prouver, par exemple dans le cas discret, que le centre de masse G est uniquement défini par la relation*

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, \mathbf{GM}_i = 0 \tag{4.3.5}$$

qui en constitue une définition alternative.

Un corollaire important du Théorème général I (4.1.4) et de la définition (4.3.2), (4.3.3) du barycentre est donné par la

Proposition 4.3.6. *Le mouvement $\mathbf{R}(t)$ du barycentre d'un système de masse totale M est régi par l'équation différentielle suivante*

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{f} \tag{4.3.6}$$

où $\mathbf{f}$ désigne la force totale extérieure.

Le mouvement du barycentre correspond au mouvement d'un point matériel de masse, la masse totale, soumis à une force représentée par la force totale extérieure.

Exercice 4.3.7. *(i) Déterminer la position du centre de masse G d'un demi-disque homogène de rayon R. (ii) Même question pour un hémisphère plein de rayon R.*

Démonstration. (i) Considérons le demi-disque $\mathcal{S}$ défini par $x^2 + y^2 \leq R^2$ et $0 \leq y$; si M désigne la masse de $\mathcal{S}$ et $\varrho = M/(\frac{1}{2}\pi R^2)$ sa densité on a clairement $\mathbf{R} = (0, Y)$ où $Y = (1/M) \int_{\mathcal{S}} \varrho \, y \, dxdy = (2/\pi R^2) \int_{[O,R]\times[0,\pi]} r \sin\theta \, r dr d\theta$, i.e $Y = 4R/(3\pi)$.

(ii) Si l'hémisphère plein de rayon R est défini par $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ et $0 \leq z$, on trouve $\mathbf{R} = (0, 0, Z)$ où $Z = \frac{3}{8}R$. □

Exercice 4.3.8. *Déterminer la position du centre de masse G d'un cône homogène, plein, de hauteur h et de rayon R.*

Démonstration. Considérons le cône $\mathcal{S}$, dont la pointe est l'origine O, défini en coordonnées cylindriques (r, θ, z) par $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq Rz/h$ et $0 \leq z \leq h$. L'élément de volume en coordonnées cylindriques étant $dV = rdrd\theta dz$, le volume de $\mathcal{S}$ est $V = \int_{\mathcal{S}} dV = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Le barycentre du cône est alors $\mathbf{R} = (0, 0, Z)$ où $Z = (1/V) \int_{\mathcal{S}} z\, dV = (1/V) \int_0^h zdz \int_0^{Rz/h} rdr \int_0^{2\pi} d\theta$ et finalement $Z = \frac{3}{4}h$. □

4.3.2 Opérateur d'inertie

Considérons maintenant un solide mobile autour d'un point fixe O. En ayant recours à (3.2.16), et au fait que $\mathbf{b} = 0$ et $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = 0$, on voit que la vitesse absolue d'un point $\mathbf{r}$ de ce solide est

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{4.3.7}$$

Supposons, pour l'instant, le solide formé de N points distincts. Le moment angulaire d'un point matériel $\mathbf{r}$ de masse m par rapport à O se calcule aisément ; on trouve $\boldsymbol{\ell} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -m\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})$, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\ell} = -m\, j(\mathbf{r})^2 \boldsymbol{\omega}. \tag{4.3.8}$$

D'où le lemme suivant donnant le moment angulaire total du solide.

Lemme 4.3.9. *(i) Le moment angulaire total par rapport à un point fixe O d'un solide formé de N points matériels $(\mathbf{r}_i, m_i)_{i=1,\ldots,N}$ est donné par*

$$\boxed{\boldsymbol{\ell} = I\, \boldsymbol{\omega}} \tag{4.3.9}$$

*où I est un opérateur linéaire appelé **opérateur d'inertie** du système ; c'est un opérateur symétrique qui prend la forme*

$$I = -\sum_{i=1}^{N} m_i\, j(\mathbf{r}_i)^2 \tag{4.3.10}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\|\mathbf{r}_i\|^2\, \mathbf{1} - \mathbf{r}_i\, \overline{\mathbf{r}_i} \right] \tag{4.3.11}$$

dans le cas discret.

(ii) Dans le cas d'un solide $(\mathcal{S}, \varrho)$, le moment angulaire $\boldsymbol{\ell}$ du solide par rapport au point fixe O est toujours donné par (4.3.9), et l'opérateur d'inertie par

$$I = -\int_{\mathcal{S}} \varrho(\mathbf{r})\, j(\mathbf{r})^2\, dV(\mathbf{r}) \tag{4.3.12}$$

$$= \int_{\mathcal{S}} \varrho(\mathbf{r}) \Big[\|\mathbf{r}\|^2\, \mathbf{1} - \mathbf{r}\, \overline{\mathbf{r}} \Big] dV(\mathbf{r}) \tag{4.3.13}$$

dans le cas continu.

Démonstration. (ii) Il suffit d'appliquer (4.3.8) pour calculer le moment angulaire $\boldsymbol{\ell}_i$ de chaque point $\mathbf{r}_i$ pour $i = 1, \ldots, N$. Le moment angulaire total du système étant $\boldsymbol{\ell} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\ell}_i$, la formule (4.3.10) suit. L'expression (4.3.11) est déduite de (3.2.8). L'opérateur est trivialement symétrique, $I = \overline{I}$, puisque la dyade $\mathbf{r}_i\, \overline{\mathbf{r}_i}$ est symétrique.

(ii) Le moment angulaire total du solide est $\boldsymbol{\ell} = \int_{\mathcal{S}} (\varrho(\mathbf{r})\, \mathbf{r} \times \mathbf{v})\, dV(\mathbf{r})$ et l'expression (4.3.12) est alors déduite de (4.3.8). □

Exercice 4.3.10. *Prouver que l'opérateur d'inertie (4.3.11) prend, en coordonnées cartésiennes, la forme suivante*

$$I = \begin{pmatrix} +\sum_{i=1}^{N} m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i y_i & -\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i y_i & +\sum_{i=1}^{N} m_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i z_i & -\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i z_i & +\sum_{i=1}^{N} m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \tag{4.3.14}$$

Exercice 4.3.11. *Prouver que l'opérateur d'inertie (4.3.13) prend, en coordonnées cartésiennes, la forme suivante*

$$I = \begin{pmatrix} +\int_{\mathcal{S}} \varrho(y^2 + z^2) dV & -\int_{\mathcal{S}} \varrho\, xy\, dV & -\int_{\mathcal{S}} \varrho\, xz\, dV \\ -\int_{\mathcal{S}} \varrho\, xy\, dV & +\int_{\mathcal{S}} \varrho(x^2 + z^2) dV & -\int_{\mathcal{S}} \varrho\, yz\, dV \\ -\int_{\mathcal{S}} \varrho\, xz\, dV & -\int_{\mathcal{S}} \varrho\, yz\, dV & +\int_{\mathcal{S}} \varrho(x^2 + y^2) dV \end{pmatrix} \tag{4.3.15}$$

Corollaire 4.3.12. *Le moment angulaire* $\mathbf{L}$ *d'un solide $(\mathcal{S}, \varrho)$ par rapport à un point fixe O, exprimé dans le référentiel mobile $A(t)$ est donné par*

$$\boldsymbol{\ell} = A\mathbf{L} \tag{4.3.16}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathcal{I}\,\boldsymbol{\Omega}} \tag{4.3.17}$$

où $\boldsymbol{\Omega}$ *est le vecteur instantané de rotation exprimé dans le repère mobile,* $\boldsymbol{\omega} = A\boldsymbol{\Omega}$*, et* $\mathcal{I} = A^{-1}IA$ *l'opérateur d'inertie dans le repère mobile.*[2]

Démonstration. Il suffit d'utiliser les formules de passage du repère fixe au repère mobile, formules rappelées dans l'énoncé. □

Remarque 4.3.13. *L'opérateur d'inertie est un opérateur symétrique, il est donc diagonalisable. Ses directions propres sont appelées directions principales ou* ***axes principaux d'inertie*** *du solide. En pratique, on ramène le calcul de l'opérateur d'inertie* I *à celui de ses valeurs propres* I_1, I_2, I_3*.*

Exercice 4.3.14. *(i) Calculer l'opérateur d'inertie* I *par rapport au centre d'une boule homogène de masse* M *et de rayon* R*. (ii) Même question pour une sphère homogène de masse* M *et de rayon* R*. (iii) Même question pour un disque homogène de masse* M *et de rayon* R*.*

Démonstration. Réponse : (i) Pour une boule B^3_R homogène et de masse M la densité est $\varrho = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$; utilisant le fait trivial

$$\int_{B^3_R} x^2\,dxdydz = \int_{B^3_R} y^2\,dxdydz = \int_{B^3_R} z^2\,dxdydz = \frac{1}{3}\frac{4\pi R^5}{5} \tag{4.3.18}$$

on trouve aisément $I = \mathrm{diag}(I_1, I_1, I_1)$ avec $I_1 = \frac{2}{5}MR^2$.

(ii) Pour une sphère S^2_R homogène de même masse, $\varrho = M/(4\pi R^2)$ et puisque

$$\int_{S^2_R} x^2\,dS = \int_{S^2_R} y^2\,dS = \int_{S^2_R} z^2\,dS = \frac{1}{3}\,4\pi R^4 \tag{4.3.19}$$

il vient finalement $I = \mathrm{diag}(I_1, I_1, I_1)$ avec $I_1 = \frac{2}{3}MR^2$.

---

2. Nous ne considérerons désormais comme objet fondamental que l'opérateur d'inertie $\mathcal{I}$ propre, c'est-à-dire relatif au solide.

(iii) Pour un disque plein D^2_R homogène et de masse M dans le plan $z = 0$, on a $\varrho = M/(\pi R^2)$ et

$$\int_{D^2_R} x^2 \, dS = \int_{D^2_R} y^2 \, dS = \frac{1}{4} \pi R^4 \tag{4.3.20}$$

d'où $I = \mathrm{diag}(I_1, I_1, I_3)$ avec $I_1 = \frac{1}{4} MR^2$ et $I_3 = \frac{1}{2} MR^2$. Nous remarquons que, pour ce solide *plan*, on a

$$I_3 = I_1 + I_2$$

dans les axes principaux d'inertie. Ce fait est général comme le montre clairement la formule (4.3.15). □

Exercice 4.3.15. *Déterminer l'opérateur d'inertie I d'un cylindre homogène de masse M, de hauteur h et de rayon R par rapport à son centre d'inertie.*

Démonstration. On trouve $I = \mathrm{diag}(I_1, I_1, I_3)$ avec $I_1 = \frac{1}{4} M(R^2 + \frac{1}{3} h^2)$ et, d'autre part, $I_3 = \frac{1}{2} MR^2$. □

Exercice 4.3.16. *Calculer l'opérateur d'inertie I d'un ellipsoïde plein, homogène, de masse M et de demi-axes (a, b, c).*

Démonstration. Le bord de l'ellipsoïde, $\mathcal{E}$, a pour équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Posons $x' = x/a$, $y' = y/c$ et $z' = z/c$ de sorte que dans ces nouvelles coordonnées on a $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, i.e. l'équation d'une sphère de rayon $R = 1$. On a donc $I_1 = \int_{\mathcal{E}} \varrho(y^2 + z^2) \, dxdydz = \varrho \int_{B^3_1} abc(b^2 y'^2 + c^2 z'^2) \, dx'dy'dz'$. En utilisant le résultat (4.3.18) avec $R = 1$ pour les variables x', y', z' on trouve $I_1 = \varrho \, abc(4\pi/15)(b^2 + c^2)$. On sait, d'autre part, que $\varrho = M/(\frac{4}{3}\pi abc)$; ceci entraîne $I_1 = \frac{1}{5} M(b^2 + c^2)$. Nous obtenons enfin $I = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{5} M(b^2 + c^2), \frac{1}{5} M(c^2 + a^2), \frac{1}{5} M(a^2 + b^2)\right)$. □

Proposition 4.3.17. *Les valeurs propres (I_1, I_2, I_3) de l'opérateur d'inertie vérifient les inégalités triangulaires*

$$I_1 \leq I_2 + I_3, \qquad I_2 \leq I_3 + I_1, \qquad I_3 \leq I_1 + I_2,$$

dont certaines deviennent des égalités dans le cas de solides plans.

Démonstration. On voit (4.3.15) que $I_1+I_2 = \int_{\mathcal{S}} \varrho(y^2+2z^2+x^2)\,dV$, donc $I_1+I_2 = I_3 + 2\int_{\mathcal{S}} \varrho\, z^2\,dV \geq I_3$. On a égalité si $z=0$, i.e. dans le cas d'un solide plan. □

Définition-Théorème 4.3.1. *On appelle **rotateur** tout solide dont les points sont distribués sur une droite, par exemple la droite $x=y=0$. L'opérateur d'inertie d'un rotateur est*

$$I = \mathrm{diag}(I_1, I_1, 0). \tag{4.3.21}$$

Démonstration. Trivial. □

Exercice 4.3.18. *Donner l'opérateur d'inertie I_G par rapport au centre d'inertie G en fonction de l'opérateur d'inertie I_O par rapport au point fixe O en prouvant que*

$$I_G = I_O + M j(\mathbf{R})^2 \tag{4.3.22}$$

où $\mathbf{R} = \mathbf{OG}$ désigne le barycentre et M la masse totale.

Démonstration. Effectuons le calcul dans le cas discret. On a $\mathbf{OM}_i = \mathbf{OG} + \mathbf{GM}_i$ pour tout $i = 1,\dots,N$ de sorte que $j(\mathbf{OM}_i)^2 = j(\mathbf{OG})^2 + j(\mathbf{GM}_i)j(\mathbf{OG}) + j(\mathbf{OG})j(\mathbf{GM}_i) + j(\mathbf{GM}_i)^2$. La définition (4.3.10) de I_O donne alors

$$\begin{aligned} I_O &= -\sum_{i=1}^{N} m_i\, j(\mathbf{OM}_i)^2 \\ &= -\sum_{i=1}^{N} m_i \left[j(\mathbf{OG})^2 + j(\mathbf{GM}_i)j(\mathbf{OG}) + j(\mathbf{OG})j(\mathbf{GM}_i) + j(\mathbf{GM}_i)^2 \right] \\ &= -M\, j(\mathbf{OG})^2 + I_G \end{aligned}$$

grâce à la définition (4.3.5) du centre de masse, et en appelant M la masse totale. □

4.3.3 Energie cinétique du solide

On peut maintenant déterminer l'énergie cinétique du solide (par rapport au repère fixe) entrant dans la définition du lagrangien. Nous exprimerons cette quantité à la fois dans le repère fixe et dans le repère mobile lié au point fixe, O.

Théorème 4.3.19. *L'énergie cinétique du solide mobile autour d'un point fixe, O, est donnée par la forme quadratique suivante en la vitesse angulaire*

$$T = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\omega}, I\,\boldsymbol{\omega}\rangle = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\ell}\rangle, \tag{4.3.23}$$

$$= \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\Omega}, \mathcal{I}\,\boldsymbol{\Omega}\rangle = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{L}\rangle. \tag{4.3.24}$$

Démonstration. On sait que $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\|\mathbf{v}_i\|^2$ dans le cas discret, par exemple. Grâce à (4.3.7), on trouve

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} -m_i\langle \boldsymbol{\omega}, j(\mathbf{r}_i)^2\boldsymbol{\omega}\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\omega}, \left[\sum_{i=1}^{N} -m_i\, j(\mathbf{r}_i)^2\right]\boldsymbol{\omega}\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\omega}, I\boldsymbol{\omega}\rangle \end{aligned}$$

avec la définition (4.3.10) de l'opérateur d'inertie. Le reste de la preuve découle de la relation (4.3.9) entre moment angulaire et vitesse angulaire. L'expression (4.3.24) de l'énergie cinétique en terme des quantités précédentes exprimées dans le référentiel mobile lié au solide suit du fait que $\boldsymbol{\omega} = A\boldsymbol{\Omega}$ et $I = A\mathcal{I}A^{-1}$, avec $A \in \mathrm{SO}(3)$. □

L'énergie cinétique d'un solide évoluant dans l'espace sans point fixe, se calcule maintenant aisément ; elle est donnée par le

Corollaire 4.3.20. *L'énergie cinétique d'un solide est somme de l'énergie cinétique de translation du centre d'inertie, G, et de l'énergie cinétique de rotation autour du point G, i.e.*

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M \|\mathbf{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, I_G \, \boldsymbol{\omega} \rangle} \tag{4.3.25}$$

où M est la masse totale, $\mathbf{v}_G$ la vitesse du centre d'inertie G du solide, I_G est son opérateur d'inertie relativement à G et $\boldsymbol{\omega}$ sa vitesse angulaire.

Démonstration. Travaillons, comme précédemment, dans le cas d'un solide formé de N points. L'énergie cinétique est $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\mathbf{v}_i\|^2$ où, cf. (4.2.1), la vitesse du point M_i est $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{GM}_i$ pour tout $i = 1, \ldots, N$. On trouve alors aisément $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\|\mathbf{v}_G\|^2 + 2 \langle \mathbf{v}_G, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{GM}_i \rangle + \|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{GM}_i\|^2 \right)$ ou encore, en développant, $T = \frac{1}{2} M \|\mathbf{v}_G\|^2 + \langle \mathbf{v}_G \times \boldsymbol{\omega}, \sum_{i=1}^N m_i \, \mathbf{GM}_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \, \|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{GM}_i\|^2$, en désignant par M la masse totale. Le deuxième terme s'annule en vertu de (4.3.5) et le troisième donné par (4.3.23) avec $O = G$. □

4.3.4 Dynamique du solide

Donnons, dans ce chapitre, les équations du mouvement d'un solide en présence de forces extérieures. Nous supposerons, pour simplifier, ce solide mobile autour d'un point fixe, O. Cette restriction, peu fondamentale, permet la description complète d'un certain nombre de systèmes mécaniques de première importance comme les toupies, les gyrocompas, les gyroscopes dédiés à la stabilisation des véhicules, etc.

On déduit du Théorème général II, à savoir de l'équation (4.1.6), le

Théorème 4.3.21. *Soit $\mathbf{k}$ le moment des forces extérieures appliquées à un solide relativement à un point O ; l'évolution temporelle du moment angulaire $\boldsymbol{\ell}$ de ce solide est gouvernée par l'équation différentielle*

$$\frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} = \mathbf{k}. \tag{4.3.26}$$

Compte tenu de la relation (4.3.9) entre moment angulaire $\boldsymbol{\ell}$ et vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ du solide on obtient dans le cas très particulier d'un solide à *symétrie sphérique* où $I = \mathrm{diag}(I_1, I_1, I_1)$ le

Corollaire 4.3.22. *En l'absence de forces extérieures, le moment et la vitesse angulaires d'un solide à symétrie sphérique sont des constantes du mouvement,*[3]

$$\boldsymbol{\ell} = \mathrm{const.} \qquad \& \qquad \boldsymbol{\omega} = \mathrm{const.} \tag{4.3.27}$$

Démonstration. On déduit de (4.3.26) et de $\mathbf{k} = 0$ que $\boldsymbol{\ell} = \mathrm{const.}$ Mais $\boldsymbol{\ell} = I_1\boldsymbol{\omega}$, donc $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\ell}/I_1 = \mathrm{const.}$ □

Remarque 4.3.23. *Attention $\boldsymbol{\ell}$ et $\boldsymbol{\omega}$ ne sont des vecteurs parallèles que dans le cas des boules et des sphères (solides* SO(3)*-invariants).*

Illustrons le Théorème 4.3.21 par un exemple mettant en évidence le mouvement de *précession* d'une toupie avec point fixe dans le champ de pesanteur terrestre. (La toupie “tombe” — comme tout corps dans le champ de gravitation — mais sa chute “libre” est de nature plus subtile et complexe que celle d'un simple point matériel.)

Exemple 4.3.24. *Considérons une toupie symétrique, $I_1 = I_2$, de masse M, avec point fixe O. Cette toupie est plongée dans le champ de pesanteur terrestre $\mathbf{g} = \mathrm{const.}$ On désigne par $\mathbf{R} = \mathbf{OG}$ son barycentre, par $R = \|\mathbf{R}\|$ la distance du point O au centre de masse G et par $\mathbf{u} = \mathbf{R}/R$ la direction du barycentre. Dans l'*approximation gyroscopique *où le* spin *est* dominant *— on appelle “spin” ou vitesse angulaire propre le vecteur $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{spin}} = \omega_{\mathrm{spin}}\mathbf{u}$ de rotation instantanée de la toupie autour de son axe de symétrie. Dans cette approximation on a $\omega_{\mathrm{spin}} \cong \mathrm{const.}$ et*

$$\boldsymbol{\ell} \cong I\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{spin}} \tag{4.3.28}$$

où $I = I_3$ est le moment d'inertie par rapport à l'axe de symétrie de la toupie.

3. Une toupie libre à symétrie sphérique tourne uniformément autour d'une direction fixe !

On obtient, grâce à (4.3.26) et au fait que $\mathbf{k} = \mathbf{R} \times M\mathbf{g} = MR\,\mathbf{u} \times \mathbf{g}$*, l'équation différentielle* $\dot{\boldsymbol{\ell}} \cong I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{spin}} = I\omega_{\mathrm{spin}}\dot{\mathbf{u}} = -MR\,\mathbf{g}\times\mathbf{u}$*, conduisant à l'équation différentielle suivante gouvernant le mouvement de l'axe de la toupie*

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \cong \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{prec}} \times \mathbf{u} \qquad \text{où} \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{prec}} = -\frac{MR}{I\omega_{\mathrm{spin}}}\,\mathbf{g}. \tag{4.3.29}$$

La direction de la toupie évolue donc au cours du temps selon la loi $\mathbf{u}(t) = A(t)\mathbf{u}_0$ *où* $A(t)$ *est une matrice de rotation autour de la verticale (la direction de* $\mathbf{g}$*) et de vitesse angulaire constante de* ***précession***

$$\omega_{\mathrm{prec}} = \frac{MRg}{I\omega_{\mathrm{spin}}}$$

où $g = \|\mathbf{g}\|$ *est l'intensité de l'accélération de la pesanteur.*[4]

4.3.5 Lois de la statique

Un solide est en *équilibre statique* si chacun de ses points a une position fixe, donc une vitesse nulle ; l'impulsion totale et le moment angulaire total du solide sont donc nuls, i.e. $\mathbf{p} = 0$ et $\boldsymbol{\ell} = 0$. Ceci signifie, cf. les Théorèmes généraux (4.1.4) et (4.1.6), que la somme des forces extérieures agissant sur le solide et le moment, par rapport à un point O, de ces forces sont nécessairement tous deux nuls.

Définition 4.3.25. *Soient* $\mathbf{f}$ *la somme des forces extérieures et* $\mathbf{k}$ *le moment des forces extérieures relativement à un point* O *agissant sur un solide. Les* ***conditions d'équilibre*** *de ce solide sont*

$$\boxed{\mathbf{f} = 0 \qquad \& \qquad \mathbf{k} = 0} \tag{4.3.30}$$

Remarque 4.3.26. *Les conditions d'équilibre (4.3.30) sont, en fait, indépendantes du choix du point de base* O*.*

Quand il y a contact entre solides, les conditions d'équilibre doivent s'appliquer à chaque solide. Le contact entre deux solides en équilibre est garanti par la présence

4. On a bien $\dot{A}(t)A(t)^{-1} = j(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{prec}})$.

de **forces de contact** appelées encore forces de réaction entre solides. Les solides pouvant éventuellement être reliés entre eux par des fils rigides, il conviendra aussi de tenir compte des tensions des fils dans le bilan des forces de liaison entre solides. Les forces extérieures auxquelles est soumis chaque solide individuellement incluent donc nécessairement les forces de contact, de liaison, de frottement.

Exercice 4.3.27. *On considère une échelle double B_1AB_2 dont les montants AB_1 et AB_2, de masse négligeable, sont articulés autour d'une charnière A. Les montants sont reliés par un fil B_1B_2 inextensible. Une personne de poids $\mathbf{P}$ se trouve au milieu, G, du montant AB_1 de l'échelle dont les pieds B_1 et B_2 sont en contact sans frottement avec le sol horizontal. Le système étant en équilibre, déterminer (i) la réaction $\mathbf{R}_{A_1}$ exercée en A par la tige AB_2 sur la tige AB_1, (ii) les réactions du sol $\mathbf{R}_{B_1}, \mathbf{R}_{B_2}$ et (iii) la tension $\mathbf{T}_{B_1}$ du fil en fonction de $\mathbf{P}$ et de l'angle α entre les montants de l'échelle et l'horizontale.*

Démonstration. Traitons les deux solides AB_1 et AB_2 séparément. Rappelons que la Loi de l'action et de la réaction (4.1.3) implique $\mathbf{R}_{A_1}+\mathbf{R}_{A_2} = 0$ et $\mathbf{T}_{B_1}+\mathbf{T}_{B_2} = 0$. Les conditions d'équilibre (4.3.30) s'écrivent maintenant

$$\mathbf{R}_{A_1} + \mathbf{R}_{B_1} + \mathbf{T}_{B_1} + \mathbf{P} = 0 \tag{4.3.31}$$

$$\mathbf{B}_1\mathbf{A} \times \mathbf{R}_{A_1} + \mathbf{B}_1\mathbf{G} \times \mathbf{P} = 0 \tag{4.3.32}$$

$$\mathbf{R}_{A_2} + \mathbf{R}_{B_2} + \mathbf{T}_{B_2} = 0 \tag{4.3.33}$$

$$\mathbf{B}_2\mathbf{A} \times \mathbf{R}_{A_2} = 0 \tag{4.3.34}$$

On obtient aisément, à partir de (4.3.34), $\mathbf{AB}_2 \times \mathbf{R}_{A_2} = 0$, i.e. $\mathbf{R}_{A_2} // \mathbf{AB}_2$.

Prenons $O = B_1$ comme origine, $\mathbf{e}_x$ comme la direction de $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ et $\mathbf{e}_y$ comme celle de $-\mathbf{P}$. On a

$$\mathbf{R}_{A_1} = -\mathbf{R}_{A_2} = \begin{pmatrix} -R_A \cos\alpha \\ R_A \sin\alpha \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{B_1} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{B_2} \end{pmatrix},$$

de même que

$$\mathbf{T}_{B_1} = -\mathbf{T}_{B_2} = \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix},$$

où R_A, R_{B_1}, R_{B_2}, T sont des constantes et $P = \|\mathbf{P}\|$ le poids de la personne. Il vient, grâce à (4.3.31),

$$\begin{cases} -R_A \cos\alpha + T & = & 0 \\ +R_A \sin\alpha + R_{B_1} - P & = & 0 \end{cases} \tag{4.3.35}$$

et, grâce à (4.3.32),

$$2LR_A \sin\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2}LP\cos\alpha = 0 \tag{4.3.36}$$

en désignant provisoirement par L la longueur des montants de l'échelle. Enfin (4.3.33) entraîne

$$\begin{cases} +R_A \cos\alpha - T & = & 0 \\ -R_A \sin\alpha + R_{B_2} & = & 0 \end{cases} \tag{4.3.37}$$

On déduit de (4.3.35) que $T = R_A \cos\alpha$ & $R_{B_1} = P - R_A \sin\alpha$ et de (4.3.37) que $R_{B_2} = R_A \sin\alpha$. Enfin, (4.3.36) entraîne

$$R_A = \frac{P}{4\sin\alpha}, \qquad R_{B_1} = \frac{3P}{4}, \qquad R_{B_2} = \frac{P}{4}, \qquad T = \frac{P}{4\tan\alpha},$$

ce qui constitue le résultat attendu. □

4.4 Equations d'Euler & mouvements de Poinsot

Nous étudions dans ce chapitre le mouvement d'un solide libre autour d'un point O, c'est-à-dire mobile autour d'un point fixe en l'absence de forces extérieures.

4.4.1 Equations d'Euler

Le théorème (4.3.26) nous apprend alors que le moment angulaire du solide par rapport à O et dans le repère "fixe" est $\boldsymbol{\ell} = \text{const}$.

Théorème 4.4.1. *L'évolution temporelle du moment angulaire* $\mathbf{L}$ *d'un* ***solide libre****, par rapport à un point fixe O, est gouvernée, dans un repère mobile lié au solide, par*[5]

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L} \times \mathbf{\Omega}} \tag{4.4.1}$$

où le vecteur $\mathbf{\Omega}$ *représente la vitesse angulaire du solide.*

5. Ce théorème est dû à L. Euler, "Theoria motus corporum solidorum" (1765).

Démonstration. Puisque $\boldsymbol{\ell} = A\mathbf{L} = \text{const.}$ où, cf. (4.3.16), $A(t) \in \mathrm{SO}(3)$ représente la configuration du solide à l'instant t, on a $\dot{\boldsymbol{\ell}} = \dot{A}\mathbf{L} + A\dot{\mathbf{L}} = 0$. Il s'ensuit que $\dot{A}A^{-1}A\mathbf{L} + A\dot{\mathbf{L}} = j(\boldsymbol{\omega})A\mathbf{L} + A\dot{\mathbf{L}} = 0$, grâce à (3.2.4). Mais (3.2.10) conduit, si $\boldsymbol{\omega} = A\boldsymbol{\Omega}$, à $Aj(\boldsymbol{\Omega})A^{-1}A\mathbf{L} + A\dot{\mathbf{L}} = 0$, i.e. à $A(j(\boldsymbol{\Omega})\mathbf{L} + \dot{\mathbf{L}}) = 0$ qui achève la preuve. □

Exprimons maintenant les équations d'Euler (4.4.1) dans un référentiel propre du solide, c'est-à-dire dans un référentiel lié au solide dans lequel l'opérateur d'inertie soit diagonal,

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix} \tag{4.4.2}$$

où I_1, I_2 et I_3 représentent les valeurs propres (nécessairement positives) de $\mathcal{I}$. Mais le moment angulaire $\mathbf{L}$ est, rappelons-le, relié à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ par $\mathbf{L} = \mathcal{I}\,\boldsymbol{\Omega}$, cf. (4.3.17), i.e.

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\Omega_1 \\ I_2\Omega_2 \\ I_3\Omega_3 \end{pmatrix}. \tag{4.4.3}$$

Les équations (4.4.1) s'écrivent alors dans ce repère

$$\begin{pmatrix} I_1\dot{\Omega}_1 \\ I_2\dot{\Omega}_2 \\ I_3\dot{\Omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\Omega_1 \\ I_2\Omega_2 \\ I_3\Omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} I_1\dot{\Omega}_1 &=& (I_2 - I_3)\,\Omega_2\Omega_3 \\ I_2\dot{\Omega}_2 &=& (I_3 - I_1)\,\Omega_3\Omega_1 \\ I_3\dot{\Omega}_3 &=& (I_1 - I_2)\,\Omega_1\Omega_2 \end{array}\right.} \tag{4.4.4}$$

Le système d'équations *non linéaire* (4.4.4) constitue les **équations d'Euler** régissant l'évolution temporelle de la vitesse angulaire d'un solide libre autour d'un point fixe.

Remarque 4.4.2. *(i) L'intégration de ce système d'équations différentielles est délicate, dans le cas général d'une toupie asymétrique où I_1, I_2 et I_3 sont tous différents (elle met en jeu les fonctions elliptiques). (ii) Dans le cas particulier d'une toupie à symétrie sphérique, $I_1 = I_2 = I_3$, on retrouve, par contre, le résultat élémentaire du Corollaire 4.3.22.*

4.4.2 Exemple : la toupie symétrique

Si une toupie possède un axe de symétrie privilégié, disons de direction $\mathbf{e}'_3$,[6] on est en présence d'un système à **symétrie cylindrique**. L'opérateur d'inertie de cette toupie prend la forme (4.4.2) avec

$$I_1 = I_2 \neq I_3. \tag{4.4.5}$$

Dans ces conditions, il vient trivialement grâce à (4.4.4)

$$\Omega_3 = \text{const.} \tag{4.4.6}$$

De même, on trouve $\dot{\Omega}_1 = ((I_1 - I_3)/I_1)\Omega_3\,\Omega_2$ et $\dot{\Omega}_2 = ((I_3 - I_1)/I_1)\Omega_3\,\Omega_1$, i.e. $\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2$ et $\dot{\Omega}_2 = \omega\Omega_1$ ou encore, en posant $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$,

$$\dot{\Omega} = i\omega\Omega \qquad \text{avec} \qquad \omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\,\Omega_3. \tag{4.4.7}$$

La solution générale de (4.4.7), à savoir

$$\Omega(t) = \Omega_0\, e^{i\omega[t-t_0]} \tag{4.4.8}$$

avec $\Omega_0 = \text{const.} > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ met en évidence le fait que la projection Ω de la vitesse angulaire sur la plan orthogonal à l'axe de la toupie tourne avec une vitesse angulaire constante ω donnée en (4.4.7). Grâce à (4.4.5) on conclut que la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ et le moment angulaire $\mathbf{L}$ ont un **mouvement de précession** autour de l'axe de la toupie ; ils tournent autour de cet axe avec la même vitesse angulaire ω.

4.4.3 Mouvements de Poinsot

Etudions maintenant le mouvement du moment angulaire d'un solide générique, par exemple d'une **toupie asymétrique** dont l'opérateur d'inertie I a des valeurs propres I_1, I_2, I_3 différentes, par exemple telles que

$$I_1 > I_2 > I_3. \tag{4.4.9}$$

Nous avons immédiatement un résultat général donné par le

6. Rappelons que la configuration du solide est donnée par la matrice de rotation $A = (\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3)$.

Théorème 4.4.3. *Les équations d'Euler (4.4.1) possèdent deux intégrales premières*

$$2E = \langle \mathbf{L}, \mathbf{\Omega} \rangle = \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} = \text{const.} \tag{4.4.10}$$

$$L^2 = \langle \mathbf{L}, \mathbf{L} \rangle = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \text{const.} \tag{4.4.11}$$

Démonstration. L'énergie cinétique du solide (4.3.24) donnant ici l'énergie totale $E = \frac{1}{2}\langle \mathbf{\Omega}, \mathcal{I}\,\mathbf{\Omega}\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{L}\rangle$, on obtient $dE/dt = \langle \mathbf{\Omega}, \mathcal{I}\, d\mathbf{\Omega}/dt\rangle = \langle \mathbf{\Omega}, d\mathbf{L}/dt\rangle$ et $dE/dt = \langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{L} \times \mathbf{\Omega}\rangle = 0$ grâce aux équations d'Euler (4.4.1). On a, de même, $d(L^2)/dt = 2\langle \mathbf{L}, d\mathbf{L}/dt\rangle = 2\langle \mathbf{L}, \mathbf{L} \times \mathbf{\Omega}\rangle = 0$ grâce à (4.4.1). □

Exercice 4.4.4. *Prouver (4.4.10) et (4.4.11) en utilisant la forme (4.4.4) des équations d'Euler.*

Nous voyons donc que le mouvement du moment angulaire $\mathbf{L}$ s'effectue sur des courbes, intersection d'un ellipsoïde de demi-axes $\sqrt{2EI_1}, \sqrt{2EI_2}, \sqrt{2EI_3}$ et d'une sphère de rayon L^2. Les caractéristiques de ses surfaces sont, bien sûr, définies par les conditions initiales que l'on impose au système. Ces courbes sont clairement des courbes fermées, impliquant que le mouvement du solide est **périodique**.

Six points jouent un rôle particulier ; ce sont les sommets de l'ellipsoïde correspondant à des valeurs de l'énergie, E, et du moment angulaire, L, telles que les courbes se réduisent à des points (par exemple $L = \sqrt{2EI_1}$). Ces sommets correspondent donc à des valeurs constantes du moment angulaire $\mathbf{L}$ qui est donc, comme la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$, une constante du mouvement : il existe, pour un solide libre autour d'un point fixe O six mouvement de **rotations stationnaires** autour des trois axes d'inertie du système.

Pour d'autres relations entre E et L il existe des courbes fermées correspondant à des trajectoires (périodiques) de $\mathbf{L}$. Dans le cas (4.4.9), on montre qualitativement en étudiant ces courbes aux voisinages des sommets de l'ellipsoïde que les rotations stationnaires autour des directions extrêmes $\mathbf{e}_1'$ et $\mathbf{e}_3'$ sont *stables*[7] alors qu'elles sont

7. Les courbes fermées restent dans un voisinage des sommets qu'elles entourent quand on diminue par exemple la valeur du moment angulaire L.

instables[8] autour de la direction médiane $\mathbf{e}'_2$. Voir la Figure suivante.[9]

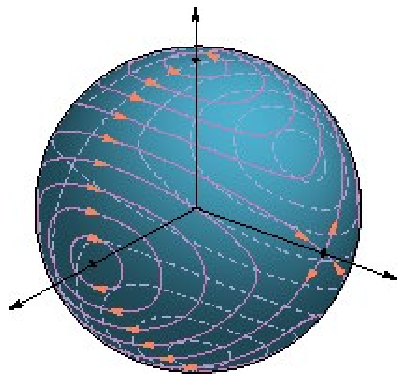


FIGURE 4.1 – Toupie de Poinsot

Afin d'étudier maintenant le mouvement du solide relativement au repère fixe, introduisons un objet géométrique utile, l'**ellipsoïde d'inertie**

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \big| \langle \mathbf{X}, \mathcal{I}\,\mathbf{X}\rangle = 1\} \tag{4.4.12}$$

relativement au repère mobile. Rappelons, cf. (4.4.10), que $2E = \langle \boldsymbol{\Omega}, \mathcal{I}\,\boldsymbol{\Omega}\rangle$, donc

$$\mathbf{X} = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\sqrt{2E}}. \tag{4.4.13}$$

Si $A(t) = (\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3) \in \mathrm{SO}(3)$ repère la position du solide autour du point O dans le référentiel fixe au temps t, on désignera par $\mathcal{E}_t = A(t)\mathcal{E}$ la position de l'ellipsoïde d'inertie au temps t par rapport au repère fixe.

Théorème 4.4.5 (Poinsot). *L'ellipsoïde d'inertie $\mathcal{E}_t$ roule sans glisser sur un plan fixe perpendiculaire au moment angulaire constant $\boldsymbol{\ell}$.*

Démonstration. Le vecteur $\mathbf{N} = \mathbf{grad}\langle \mathbf{X}, \mathcal{I}\,\mathbf{X}\rangle = 2\mathcal{I}\,\mathbf{X}$ est automatiquement orthogonal à la surface (4.4.12) au point $X \in \mathcal{E}$. Nous allons montrer que la normale $\mathbf{n} = A(t)\mathbf{N}$ à $\mathcal{E}_t$ au point $\mathbf{x} = A(t)\mathbf{X}$ est colinéaire au vecteur (constant) $\boldsymbol{\ell}$. En effet, $\mathbf{n} = 2A(t)\mathcal{I}\,\mathbf{X} = 2A(t)\mathcal{I}\,\boldsymbol{\Omega}/\sqrt{2E}$ grâce à (4.4.13). Mais, cf. (4.3.17), le

8. Les courbes s'éloignent immédiatement des sommets médians après une modification infinitésimale du moment angulaire L.
9. `http ://www.cds.caltech.edu/~marsden/books/Mechanics_and_Symmetry.html`

moment angulaire est donné par $\mathbf{L} = \mathcal{I}\,\boldsymbol{\Omega}$ relativement au solide et par $\boldsymbol{\ell} = A(t)\mathbf{L}$ dans le repère fixe, cf. (4.3.16) ; il s'ensuit que $\mathbf{n} = 2\boldsymbol{\ell}/\sqrt{2E}$ est bien parallèle au moment angulaire $\boldsymbol{\ell}$. Le plan tangent $T_{\mathbf{x}}\mathcal{E}_t$ en $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_t$ est donc perpendiculaire au vecteur constant $\boldsymbol{\ell}$. Montrons que ce plan reste fixe au cours du temps. On a $\langle \boldsymbol{\ell}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{L}, \mathbf{X} \rangle = \langle \mathbf{L}, \boldsymbol{\Omega} \rangle/\sqrt{2E}$, grâce à (4.4.13) ; mais (4.4.10) entraîne alors $\langle \boldsymbol{\ell}, \mathbf{x} \rangle = \sqrt{2E} =$ const. La projection du vecteur $x(t) \in \mathcal{E}_t$ sur la direction du vecteur fixe $\boldsymbol{\ell}$ reste constante : le plan $T_{\mathbf{x}}\mathcal{E}_t$ est indépendant du temps t. Comme $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = 0$ puisque $\mathbf{x}$ est parallèle au vecteur instantané de rotation, $\boldsymbol{\omega}$, la vitesse du point de contact $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_t$ avec le plan fixe $T_{\mathbf{x}}\mathcal{E}_t$ est nulle et l'ellipsoïde d'inertie roule sans glisser. □

Exercice 4.4.6. *(i) A quelle condition* $\boldsymbol{\Omega}_0(t) = (0, 0, \Omega_0(t))$ *est-elle une solution des équations d'Euler (4.4.4) pour une toupie asymétrique ? (ii) Linéariser les équations d'Euler au voisinage de cette solution. (iii) En déduire l'expression approchée de l'évolution temporelle du moment angulaire* $\mathbf{L}(t) = (L_1(t), L_2(t), L_3(t))$.

Démonstration. (i) Supposons que l'on ait (4.4.9) avec $I_3 > 0$. Alors, nécessairement $\dot{\Omega}_0 = 0$ et donc $\Omega_0 =$ const. (rotation stationnaire autour du troisième axe).

(ii) Posons $\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}_0(t) + \varepsilon\,\mathbf{Z}(t)$ avec $\varepsilon \ll 1$; on obtient $\dot{Z}_1 \cong Z_2\Omega_0(I_2 - I_3)/I_1$ et $\dot{Z}_2 \cong Z_1\Omega_0(I_3 - I_1)/I_2$ avec $\dot{Z}_3 \cong 0$ modulo des termes en $O(\varepsilon^2)$.

(iii) Revenant au moment angulaire $\mathbf{L} = (I_1\Omega_1, I_2\Omega_2, I_3\Omega_3)$, nous avons donc

$$\dot{L}_1 \cong \Omega_0 \left(1 - \frac{I_3}{I_2}\right) L_2, \qquad \dot{L}_2 \cong -\Omega_0 \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right) L_1, \qquad \dot{L}_3 \cong 0.$$

Cherchant la solution générale de ce système avec l'Ansatz général : $L_1 = A_1 e^{i\omega t}$ et $L_2 = A_2 e^{i\omega t}$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ et $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$, on trouve

$$\omega = \Omega_0 \sqrt{\left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\left(1 - \frac{I_3}{I_2}\right)}$$

avec $A_2 = iA_1\sqrt{(1 - I_3/I_1)/(1 - I_3/I_2)}$. Posons $A_1 = L\sqrt{1 - I_3/I_2}$ où L est une constante d'intégration que l'on peut choisir réelle ; on trouve alors

$$L_1(t) \cong L\sqrt{1 - \frac{I_3}{I_2}}\cos\omega t, \qquad L_2(t) \cong -L\sqrt{1 - \frac{I_3}{I_1}}\sin\omega t, \qquad L_3(t) \cong I_3\Omega_0.$$

Le moment angulaire $\mathbf{L}(t)$ décrit donc une *petite* ellipse autour du vecteur $\mathbf{e}'_3$. □

4.5 Toupie de Lagrange

Nous abordons enfin, dans ce chapitre, l'étude qualitative des mouvements de la **toupie de Lagrange**, c'est-à dire d'une toupie, à *symétrie axiale* (ou cylindrique), mobile autour d'un *point fixe* dans le champ de pesanteur constant.

La toupie $(\mathcal{S}, \varrho)$ supposée de densité de masse constante, $\varrho = \text{const.}$, est donc mobile autour d'un point fixe, sa pointe O, dans le champ d'accélération de la pesanteur $\mathbf{g} = \text{const.}$, d'intensité $g = \|\mathbf{g}\|$. On désigne par G le centre d'inertie du solide, par $\mathbf{R} = \mathbf{OG}$ son barycentre relativement à O et on pose $R = \|\mathbf{OG}\|$.

4.5.1 Angles d'Euler

Comment repérer une configuration de la toupie ? En d'autres termes, comment paramétrer la matrice $A \in \mathrm{SO}(3)$ repérant la position de la toupie, à un instant donné, relativement à un repère euclidien fixe $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3))$?

La réponse à cette question est due à L. Euler qui a proposé de cartographier le groupe SO(3) des rotations euclidiennes à l'aide de trois angles appelés depuis lors **angles d'Euler**.

Considérons les directions propres de la toupie confondues dans un premier temps avec la base orthonormée directe fixe $(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)$. Pour atteindre une configuration arbitraire de la toupie procédons en trois étapes.

1. Une rotation $A_3(\phi)$ d'angle ϕ autour de $\mathbf{e}_3$ transforme la base $(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)$ en $(\mathbf{e}_1^*\ \mathbf{e}_2^*\ \mathbf{e}_3^*) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)A_3(\phi)$ en invariant $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^*$.
2. Une rotation $A_1(\theta)$ d'angle θ autour de $\mathbf{e}_1^*$ transforme la base $(\mathbf{e}_1^*\ \mathbf{e}_2^*\ \mathbf{e}_3^*)$ en $(\mathbf{e}_1^{**}\ \mathbf{e}_2^{**}\ \mathbf{e}_3^{**}) = (\mathbf{e}_1^*\ \mathbf{e}_2^*\ \mathbf{e}_3^*)A_1(\theta)$ en invariant $\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1^{**}$.
3. Une rotation $A_3(\psi)$ d'angle ψ autour de $\mathbf{e}_3^{**}$ transforme la base $(\mathbf{e}_1^{**}\ \mathbf{e}_2^{**}\ \mathbf{e}_3^{**})$ en $(\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}_1^{**}\ \mathbf{e}_2^{**}\ \mathbf{e}_3^{**})A_3(\psi)$ en invariant $\mathbf{e}_3^{**} = \mathbf{e}'_3$.

Nous avons enfin $(\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)A_3(\phi)A_1(\theta)A_3(\psi)$; en identifiant comme convenu $(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'expression de la base $(\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3) = A$

attachée à la toupie prend la forme suivante

$$\boxed{A = A_3(\phi)A_1(\theta)A_3(\psi)} \tag{4.5.1}$$

Définition 4.5.1. *L'angle $0 \leq \phi \leq 2\pi$ est appelé* ***azimut*** *et $0 \leq \theta \leq \pi$ angle de* ***nutation****, l'angle $0 \leq \psi \leq 2\pi$ étant quant à lui l'angle de* ***rotation propre*** *(ou* ***spin****) ; voir la Fig. 4.2.*[10] *L'axe engendré par $\mathbf{e}_1^*$ est appelé* ***ligne des nœuds****.*

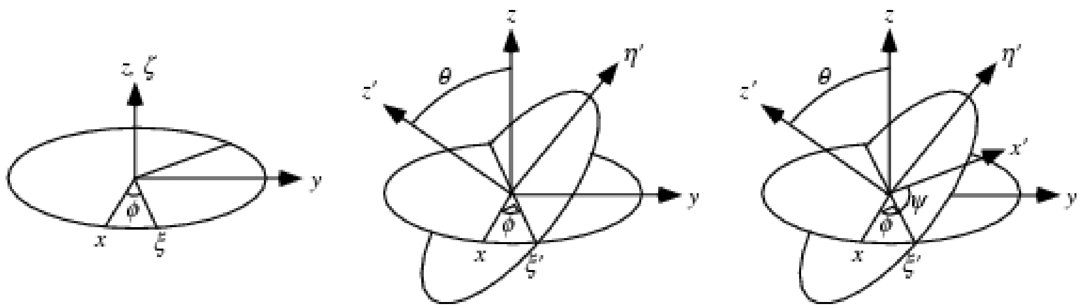


FIGURE 4.2 – Angles d'Euler

Les trois angles d'Euler fournissent ainsi une "carte locale"

$$]0, 2\pi[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to \mathrm{SO}(3) : (\phi, \theta, \psi) \mapsto A(\phi, \theta, \psi)$$

du groupe des rotations. (Les rotations infinitésimales forment, cf. (3.2.4), un espace vectoriel réel de dimension 3 constitué des vecteurs instantanés de rotation $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$.)

Nous avons donc la

Proposition 4.5.2. *Les matrices $A \in \mathrm{SO}(3)$ sont de la forme générique*

$$A(\phi, \theta, \psi) = \exp(\phi\, j(\mathbf{e}_3)) \exp(\theta\, j(\mathbf{e}_1)) \exp(\psi\, j(\mathbf{e}_3)). \tag{4.5.2}$$

Démonstration. La preuve découle du résultat (4.5.1) et du fait qu'une rotation d'angle α autour d'une direction *fixe* $\mathbf{u}$ est de la forme $A = \exp(\alpha\, j(\mathbf{u}))$ où l'exponentielle d'une matrice Z est définie par la série

$$\exp(Z) = \mathbf{1} + Z + \frac{Z^2}{2!} + \ldots + \frac{Z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Z^n}{n!}$$

dont on démontre qu'elle est convergente. □

10. http ://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html

Exercice 4.5.3. *Vérifier que l'on a bien*

$$A_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \& \qquad A_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.5.2 Lagrangien de la toupie de Lagrange

Déterminons le lagrangien d'un solide quelconque conduisant aux équations régissant son mouvement. Il nous faut donc déterminer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V en terme des angles d'Euler (ϕ, θ, ψ) et des vitesses associées $(\dot\phi, \dot\theta, \dot\psi)$. Nous spécialiserons ensuite ce lagrangien au cas de la toupie de Lagrange.

L'expression (4.3.24) de l'énergie cinétique met en jeu la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ du solide exprimée dans le repère mobile $\mathcal{R}' = (O, (\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3))$ par rapport auquel l'opérateur d'inertie est diagonal, i.e.

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$$

où les moments d'inertie I_1, I_2, I_3 du solide sont a priori arbitraires. La **toupie de Lagrange** est, elle, caractérisée comme en (4.4.5) par.

$$\boxed{I_1 = I_2 \neq I_3} \tag{4.5.3}$$

Lemme 4.5.4. *La vitesse angulaire du solide exprimée dans $\mathcal{R}'$ est donnée par*

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot\phi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi \\ \dot\phi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi \\ \dot\phi\cos\theta + \dot\psi \end{pmatrix}. \tag{4.5.4}$$

Démonstration. On a $A^{-1}\dot{A} = A^{-1}(\dot{A}A^{-1})A = A^{-1}j(\boldsymbol{\omega})A$ avec la définition (3.2.4) du vecteur instantané de rotation $\boldsymbol{\omega}$. De plus (3.2.10) entraîne $A^{-1}\dot{A} = j(A^{-1}\boldsymbol{\omega})$, ou encore

$$A^{-1}\dot{A} = j(\mathbf{\Omega}) \tag{4.5.5}$$

grâce à (3.2.18). Cette formule donnera, pour une matrice A de la forme (4.5.1), l'expression (4.5.4) recherchée.

On trouve, en effet, $\dot{A} = \dot{A}_3(\phi)A_1(\theta)A_3(\psi)+A_3(\phi)\dot{A}_1(\theta)A_3(\psi)+A_3(\phi)A_1(\theta)\dot{A}_3(\psi)$ et donc, puisque $A^{-1} = A_3(\psi)^{-1}A_1(\theta)^{-1}A_3(\phi)^{-1}$, il vient

$$
\begin{aligned}
A^{-1}\dot{A} = & + A_3(\psi)^{-1}A_1(\theta)^{-1}A_3(\phi)^{-1}\dot{A}_3(\phi)A_1(\theta)A_3(\psi) \\
& + A_3(\psi)^{-1}A_1(\theta)^{-1}\dot{A}_1(\theta)A_3(\psi) \\
& + A_3(\psi)^{-1}\dot{A}_3(\psi) \\
= & + A_3(\psi)^{-1}A_1(\theta)^{-1}\dot{\phi}\, j(\mathbf{e}_3)A_1(\theta)A_3(\psi) \\
& + A_3(\psi)^{-1}\dot{\theta}\, j(\mathbf{e}_1)A_3(\psi) \\
& + \dot{\psi}\, j(\mathbf{e}_3) \\
= & + \dot{\phi}\, j(A_3(-\psi)A_1(-\theta)\mathbf{e}_3) \\
& + \dot{\theta}\, j(A_3(-\psi)\mathbf{e}_1) \\
& + \dot{\psi}\, j(\mathbf{e}_3) \\
= & + \dot{\phi}\, j(\sin\theta\sin\psi\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\cos\psi\,\mathbf{e}_2 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3) \\
& + \dot{\theta}\, j(\cos\psi\,\mathbf{e}_1 - \sin\psi\,\mathbf{e}_2) \\
& + \dot{\psi}\, j(\mathbf{e}_3),
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire l'expression attendue. □

L'énergie cinétique du solide $T = \frac{1}{2}\langle\mathbf{\Omega}, \mathcal{I}\mathbf{\Omega}\rangle = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right)$ est alors

$$
\begin{aligned}
T = & + \frac{I_1}{2}(\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)^2 \\
& + \frac{I_2}{2}(\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)^2 \\
& + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2.
\end{aligned} \tag{4.5.6}
$$

L'énergie potentielle du solide $(\mathcal{S}, \varrho)$ est $V = \int_{\mathcal{S}} \varrho g z\, dxdydz = Mg\langle\mathbf{R}, \mathbf{e}_3\rangle$, i.e.

$$V = MgR\cos\theta. \tag{4.5.7}$$

Proposition 4.5.5. *Le lagrangien de la toupie de Lagrange (4.5.3) est donné par*

$$\boxed{L = \frac{I_1}{2}(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - MgR\cos\theta} \tag{4.5.8}$$

Démonstration. Nous avons $L = T - V$ où T est donnée par (4.5.6) et V par (4.5.7). Le cas particulier $I_1 = I_2$, cf. (4.5.3), conduit alors au lagrangien L recherché. □

4.5.3 Mouvements de la toupie de Lagrange

Nous sommes maintenant en mesure de présenter une étude qualitative des mouvements de la toupie de Lagrange en tirant profit de l'existence de trois intégrales premières des équations du mouvement.

Proposition 4.5.6. *Les équations de Lagrange associées au lagrangien (4.5.8) possèdent trois intégrales premières, à savoir*

$$\ell_3 = \dot\phi(I_1 \sin^2\theta + I_3\cos^2\theta) + I_3\dot\psi\cos\theta = \text{const.} \tag{4.5.9}$$

$$L_3 = I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi) = \text{const.} \tag{4.5.10}$$

$$H = \frac{I_1}{2}(\dot\phi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{I_3}{2}(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 + MgR\cos\theta = \text{const.} \tag{4.5.11}$$

Démonstration. Les variables ϕ et ψ sont clairement des variables cycliques (1.3.17) car le lagrangien L n'en dépend pas. Les quantités $\ell_3 = \partial L/\partial\dot\phi$ et $L_3 = \partial L/\partial\dot\psi$ sont donc des constantes du mouvement. Remarquons que $\ell_3 = \langle \boldsymbol{\ell}, \mathbf{e}_3\rangle$ est, en fait, la troisième composante du moment angulaire $\boldsymbol{\ell}$; quant à $L_3 = I_3\Omega_3$, c'est la troisième composante du moment angulaire $\mathbf{L}$ exprimé dans la base mobile. Enfin $H = T + V$ n'est autre que l'hamiltonien, constante du mouvement car, cf. (2.1.6), on a $dH/dt = -\partial L/\partial t = 0$. □

Nous obtenons immédiatement les équations différentielles suivantes pour $\psi(t)$ et $\phi(t)$, résolubles par quadratures [11] une fois connue la fonction $\theta(t)$, à savoir

$$\dot\psi = \frac{L_3}{I_3} - \dot\phi\cos\theta \tag{4.5.12}$$

ainsi que, grâce à (4.5.9),

$$\dot\phi = \frac{\ell_3 - L_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}. \tag{4.5.13}$$

11. On dit qu'un système d'équations différentielles est résoluble par quadratures si l'intégration de ce système se ramène à un simple calcul de primitives.

L'hamiltonien (4.5.11), compte tenu de (4.5.10) et (4.5.13), prend alors la forme

$$H = \frac{I_1}{2}\left[\left(\frac{\ell_3 - L_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\right)^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right] + \frac{I_3}{2}\left(\frac{L_3}{I_3}\right)^2 + MgR\cos\theta$$

qui conduit à la

Proposition 4.5.7. *L'angle de nutation $\theta(t)$ de la toupie de Lagrange varie en fonction du temps t de telle sorte*

$$E = \frac{I_1}{2}\,\dot\theta^2 + V_{\text{eff}}(\theta) = \text{const.} \tag{4.5.14}$$

avec la définition suivante du potentiel effectif

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(\ell_3 - L_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + MgR\cos\theta. \tag{4.5.15}$$

Démonstration. Il suffit de développer l'expression précédente de H et de poser $E = H - L_3^2/(2I_3)$ qui est, comme H et L_3, une constante du mouvement. □

Nous allons utiliser l'intégrale première de l'énergie $E = \text{const.}$ du système ainsi réduit à un degré de liberté pour déterminer qualitativement les différents mouvements possibles de l'axe de la toupie.

Définissons les constantes suivantes

$$a = \frac{\ell_3}{I_1}, \qquad b = \frac{L_3}{I_1}, \qquad \alpha = \frac{2E}{I_1}, \qquad \beta = \frac{2MgR}{I_1} > 0$$

et posons

$$u = \cos\theta. \tag{4.5.16}$$

Il vient alors $\dot u = -\sin\theta\,\dot\theta$ et donc $\dot\theta^2 = \dot u^2/(1-u^2)$; ainsi (4.5.14) s'écrit, grâce à (4.5.15), comme $E = \frac{1}{2}I_1\alpha = \frac{1}{2}I_1\,[\dot u^2/(1-u^2) + (a-bu)^2/(1-u^2) + \beta u]$. Nous obtenons finalement l'équation suivante

$$\dot u^2 = f(u) \qquad \text{où} \qquad f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (a-bu)^2 \tag{4.5.17}$$

avec

$$\dot\phi = \frac{a - bu}{1-u^2} \tag{4.5.18}$$

ainsi que

$$\dot{\psi} = \frac{I_1}{I_3} b - \frac{u(a - bu)}{1 - u^2}. \tag{4.5.19}$$

Notons que le polynôme (4.5.17) du troisième degré $f(u) = \beta u^3 + \ldots$ tend vers $\pm\infty$ quand $u \to \pm\infty$. D'autre part, (4.5.16) imposant $-1 \leq u \leq 1$, on a en fait $f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 < 0$, si $a \neq \pm b$, aux bornes de l'intervalle permis pour u. Il est donc clair que le polynôme $f(u)$ a, pour un mouvement réel de la toupie, trois racines réelles u_1, u_2 et u_3 telles que, génériquement, $-1 < u_1 < u_2 < +1 < u_3$. Mais $\dot{u}^2 = f(u) \geq 0$ impose enfin $u \in [u_1, u_2]$. L'angle $\theta(t)$ que fait l'axe de la toupie avec la verticale varie donc périodiquement entre deux valeurs θ_1 et θ_2 (avec $\cos\theta_k = u_k$ pour $k = 1, 2$) dépendant des conditions initiales, c'est le **mouvement de nutation** de la toupie

$$\theta_2 \leq \theta(t) \leq \theta_1.$$

Enumérons maintenant, grâce à (4.5.18), les différentes lois horaires $\phi(t)$ de l'azimut, c'est-à-dire les **mouvements de précession**. Posons

$$u' = \frac{a}{b} = \frac{\ell_3}{L_3}.$$

1. Si $u' \notin]u_1, u_2[$, alors $\dot{\phi}(t) \neq 0$; la fonction $\phi(t)$ est monotone et l'axe de la toupie effectue un mouvement de précession uniforme autour de la verticale.
2. Si $u' \in]u_1, u_2[$, alors $\dot{\phi}(t)$ change de signe au cours du temps t ; la direction de l'axe de la toupie effectue des aller-retours selon des courbes en feston sur la sphère unité.
3. Si $u' = u_1$ (resp. $u' = u_2$), la vitesse $\dot{\phi}(t)$ s'annule périodiquement sur le parallèle $\theta = \theta_1$ (resp. $\theta = \theta_2$) ; la direction de l'axe de la toupie décrit une courbe avec pointes (points de rebroussement) sur la sphère unité.

Exercice 4.5.8. *Il existe une solution particulière des équations de Lagrange avec axe de la toupie vertical, $\theta(t) = 0$; cette solution, telle que $\ell_3 = L_3 = I_3\Omega_3 = \text{const.}$ avec $\Omega_3 = \dot{\phi} + \dot{\psi}$ est appelée* ***toupie dormante****. A quelle condition la position d'équilibre $\theta = 0$ est-elle une position d'équilibre stable ?*

Démonstration. Développons le potentiel effectif (4.5.15) au voisinage de $\theta = 0$ en posant $\theta = \varepsilon\theta_1$ avec $\varepsilon \ll 1$. Il vient aisément

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\theta) &= \frac{L_3^2}{2I_1}\frac{(1-\cos(\varepsilon\theta_1))^2}{\sin^2(\varepsilon\theta_1)} + MgR\cos(\varepsilon\theta_1) \\ &= MgR + \varepsilon^2\left(\frac{I_3^2\Omega_3^2}{8I_1} - \frac{MgR}{2}\right)\theta_1^2 + O(\varepsilon^4) \end{aligned}$$

et $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable si $V''_{\text{eff}}(0) > 0$, c'est-à-dire si

$$\Omega_3^2 > \frac{4MgRI_1}{I_3^2}.$$

En présence de frottements, la vitesse angulaire Ω_3 diminue et viole l'inégalité ci-dessus : la toupie se ... réveille. □

Bibliographie

[1] V. I. Arnold, “Méthodes mathématiques de la mécanique classique”, Editions Mir, Moscou (1976).

[2] M. Le Bellac, “Introduction à la mécanique”, Belin Université (1985).

[3] H. Cabannes, “Problèmes de mécanique générale”, Dunod (1966).

[4] M. Combarnous, D. Desjardin & Ch. Bacon, “Mécanique des solides et des systèmes de solides”, Dunod (2004).

[5] H. Goldstein, “Classical Mechanics”, Addison-Wesley (1980).

[6] Ch. Grossetête & P. Olive, “Mécanique des systèmes et du solide”, Ellipses (1999).

[7] W. B. Kibble & F. H. Berkshire, “Classical Mechanics”, 5th Edition, Imperial College Press (2005).

[8] C. Kittel, “Mechanics, Berkeley physics course, Vol. 1”, McGraw-Hill (1965).

[9] G. Kotkine & V. Serbo, “Recueil de problèmes de mécanique classique”, Editions Mir, Moscou (1981).

[10] L. Landau & E. Lifchitz, “Mécanique”, Editions Mir, Moscou (1969).